Проф. Н. М. ГЮНТЕР

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1934 МОСКВА

2-я типография ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Основанием этого курса служат лекции, читанные мною в Ленинградском университете в 1921/22 и 1928/29 годах, а также лекции, прочитанные мною там же небольшому кружку студентов весною 1931 года, на которых было изложено содержание последних трех глав почти в том виде, в каком они находятся в курсе.

Он отличается от имеющихся соответственных полных курсов, например от курса Гурса „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre", главным образом следующими особенностями:

1) Теория полного интеграла Лагранжа с самого начала тесно связывается с теорией характеристических линий в случае одного уравнения и характеристических многообразий в случае системы. Вследствие этого изложение отдельных методов интегрирования приобретает общее основание, и кажущиеся при некоторых способах подхода к их изложению различия в них в значительной мере сглаживаются, примером чего могут служить § 118, 119 и 121.

2) Большое значение приписано задаче Коши, исследование которой везде, где она встречается, проводится с возможной полнотой, с разбором случаев, когда задача не имеет определенного решения, и с указанием, как находить все решения, когда их множество; таковы § 18, 45, 119 и вся глава седьмая.

При постановке задачи о нахождении всех решений, удовлетворяющих данным условиям, вопросы, связанные с нахождением особенных решений, имеют некоторое значение, и потому им уделено достаточное внимание; таковы, например, в теории линейных уравнений § 19 и 47.

3) Вторая метода Якоби, которой посвящена глава десятая, изложена полностью с указанием приемов, которые при обычном изложении оказываются исключенными; примером неправильного подхода к изложению может служить конец § 63 указанного выше курса Гурса в его первом издании.

Изложение второй методы Якоби, а также методы А. Н. Коркина, потребовало внесения некоторых подробностей об интегралах С. Ли, которые и находятся в главе одиннадцатой.

Специальных теорем существования в этом курсе мы не устанавливаем: пока речь идет об уравнениях певого порядка, можно довольствоваться теоремами, установленными в курсе обыкновенных уравнений.

При составлении курса мы старались включить в него и результаты, внесенные в теорию русскими учеными; главным из таких результатов являются пополнения методы Якоби, которыми мы обязаны Н. Н. Салтыкову и Г. В. Пфейфферу: им посвящена почти вся десятая глава; мы указываем, далее, в § 112 на прием отделения переменных В. Г. Имшенецкого и много места уделяем методе А. Н. Коркина, которая дается впервые в исправленном виде в главе одиннадцатой, хотя неполнота методы мною замечена еще в 1922 году и тогда же разобрана в докладе Ленинградскому физико-математическому обществу; результатов моих исследований я до сих пор не опубликовывал.

Курс разделен на две части и одиннадцать глав, содержание которых довольно ясно из приложенного оглавления, причем курсу предпослано введение, цель которого — восстановить в памяти учащегося необходимые сведения из теории обыкновенных уравнений, а также установить терминологию, принятую в остальном курсе.

Первая часть является замкнутым целым, дающим теорию линейных уравнений, и может служить пособием для отдельного такого курса. В некоторых местах, как например в § 37 и 38, изложение более подробно, чем того требует собственно теория линейных уравнений, что вызвано желанием избежать в дальнейшем повторения простых выкладок. Глава четвертая, служащая введением в теорию систем нелинейных уравнений, построенную на изучении решения системы § 118, является вместе с тем необходимым и естественным завершением теории линейных уравнений.

Во второй части, глава шестая, о первой методе Якоби, и седьмая, о методе Коши, тесно связаны с содержанием вводной пятой главы о полном интеграле Лагранжа, и при принятом изложении ни одна из них не может быть отделена от этой последней, так же как и от другой, как видно из сказанного в § 79; что же касается главы восьмой, то она служит только введением в теорию систем уравнений, являясь как бы первым концентром этой теории. В ней даны основные определения, и если в § 106—109 и разобраны обычные методы интегрирования систем, то с исключительной целью сохранения за главой девятой, посвященной их теории, более цельного характера.

Метода Лагранжа—Шарпи, наиболее удобная при интегрировании одного уравнения с двумя независимыми переменными, помещена здесь в § 104 потому, что только после данных в начале главы определений можно дать ее изложение, не прибегая к установлению преждевременно новых понятий.

Содержанием последних трех глав можно считать покрытой всю теорию нелинейных уравнений. Изложенное в главе шестой и седьмой является частным случаем сказанного в § 119 и 121. При достаточном математическом развитии содержание этих глав может быть усвоено при знакомстве с одной первой частью курса. При систематическом изложении начинающим студентам трудно обойтись без изучения первых четырех глав второй части, но при повторении курса представляется возможным ограничить себя изложением содержания указанных глав, что достигается по проделанному мною опыту, о котором я упоминал вначале, в 16 часовых лекциях.

Читая обычный курс студентам-математикам, можно не касаться содержания § 18, 45, 75 и 96, связанных с ними примеров и всего изложенного в последних параграфах, начиная с § 130, упростив также изложение содержания главы восьмой предположением, что уравнения системы не зависят от неизвестной функции. В этом случае, конечно, § 110 должен быть изложен перед § 106 и глава третья значительно сокращена. Курс в полном объеме мог бы быть указан только для занятий аспирантов; вопросы, вошедшие в этот курс, граничат уже с теми, которые могут служить темой для самостоятельных занятий.

В более сжатом курсе для студентов университета, не специализировавшихся по математике, мною, кроме того, опускались § 19 и 47, посвященные особенным решениям, из главы третьей сохранялся фактически только § 42, опускались последние четыре параграфа главы четвертой, чрезвычайно сокращалась глава седьмая, причем метода Коши излагалась на основании сказанного в § 86, 87, 88 и 89; опускались пять последних параграфов главы девятой и из главы десятой сохранялись только первые три параграфа при указании, что метода нуждается иногда в изменениях, сводящихся к подобающему выбору решений системы линейных уравнений, связанной с данной.

Н. Гюнтер

17 марта 1933 года.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Нелинейные уравнения первого порядка.

Глава шестая. Первая метода Якоби.

Глава седьмая. Метода Коши или метода характеристических линий.

Глава восьмая. Интегрирование системы уравнений первого порядка.

Глава девятая. О полном интеграле Лагранжа в случае системы уравнений.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ.

1. Существование решений у системы уравнений. Положим дана система уравнений

$$\frac{dx_1}{dx}=P_1, \quad \frac{dx_2}{dx}=P_2, \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx}=P_{n-1}, \tag{I}$$

в которой функции

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \tag{1}$$

зависят от независимого переменного x и неизвестных функций

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}.$$

Положим, что начальные значения x и $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, равные

$$x^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, \tag{2}$$

выбраны так, что функции (1) разложимы в ряды по возрастающим степеням разностей

$$x-x^{(0)}, \ x_1-x_1^{(0)}, \ x_2-x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}-x_{n-1}^{(0)}.$$

Тогда, как известно, система (I) имеет решение, в котором функции

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

равны числам

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)},$$

когда $x=x^{(0)}$; при этом, в этом решении $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ разложимы в ряды по возрастающим степеням разности $x-x^{(0)}$; это решение единственное и не особенное.

Положим

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\varphi_1\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1}=\varphi_{n-1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x\right) \end{array}\right\} \tag{A*}$$

это решение. По условию имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x^{(0)}\right)\equiv x_1^{(0} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{n-1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}, x^{(0)}\right)\equiv x_{n-}^{(0)}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

При этом ур-ия (A*) разрешимы относительно $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$, и это решение их приводит к формулам [1])

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(0)} = \varphi_1 \; (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, x^{(0)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}^{(0)} = \varphi_{n-1} \; (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, x^{(0)}). \end{array}\right\} \quad (B^*)$$

Вследствие (3) правые части формул (B*) таковы, что имеем тождественно:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \; (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^{(0)}, x^{(0)}) \equiv x_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1} \; (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^{(0)}, x^{(0)}) \equiv x_{n-1}. \end{array}\right\} \quad 4)$$

2. Собрание общих решений и собрание интегралов. Положим, что, занимаясь системой (I), мы составили каким-нибудь образом собрание из $n-1$ уравнений, связывающих независимую переменную x и неизвестные функции $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ с $n-1$ произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \; (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1} \; (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

причем это собрание удовлетворяет трем условиям:

---

[1]) Чтобы пояснить последнее обстоятельство, рассмотрим случай одного уравнения

$$\frac{dx_1}{dx} = P_1 \; (x_1, x). \qquad (\alpha)$$

Положим

$$x_1 = \varphi \; (x_1^{(0)}, x^{(0)}, x) \qquad (\beta)$$

его решение. Кривая (β) проходит через точку ($x^{(0)}, x_1^{(0)}$). Перейдем по кривой (β) из точки ($x^{(0)}, x_1^{(0)}$) в какую-нибудь другую точку ($x^{(1)}, x_1^{(1)}$) на ней, достаточно близкую к точке ($x^{(0)}, x_1^{(0)}$). Мы будем иметь:

$$x_1^{(1)} = \varphi \; (x_1^{(0)}, x^{(0)}, x^{(1)}).$$

Равенство

$$x_1 = \varphi \; (x_1^{(1)}, x^{(1)}, x) \qquad (\gamma)$$

определяет решение уравнения (α), в котором кривая проходит через точку ($x^{(1)}, x_1^{(1)}$). Так как у уравнения (α) только одно такое решение, кривая (γ) не отлична во-первых, оно разрешимо относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \Phi_1\ (x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1} = \Phi_{n-1}\ (x, C_1, C_2 \ldots, C_{n-1}); \end{array}\right\} \qquad (A)$$

во-вторых, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, найденные таким образом, при всяком выборе постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, образуют решение системы (I); в-третьих, собрание (5) разрешимо относительно $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \psi_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_{n-1} = \psi_{n-1}\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x). \end{array}\right\} \qquad (B)$$

Собрание (5), так же как и собрание (A), мы будем называть собранием общих решений системы (I); собрание (B) мы будем называть собранием интегралов системы (I), а каждое его отдельное равенство интегралом системы (I).

Собрания (A*) и (B*) также собрания общих решений и интегралов системы (I); в них роль произвольных постоянных исполняют начальные значения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$ неизвестных функций. Их специальные свойства, выделяющие их из разнообразных собраний (A) и (B), соответствующих системе (I), характеризуются равенствами (3) и (4). Собрание (A*) мы будем называть собранием общих решений Коши, а собрание (B*) собранием интегралов Коши.

Когда составлено какое-нибудь собрание (A) или (B), преобразование его в собрание Коши не представляет затруднений. Все сводится к определению подобающим образом постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Положив

$$\left.\begin{array}{l} C_1^{(0)} = \psi_1\ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_{n-1}^{(0)} = \psi_{n-1}\ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x^{(0)}) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

от кривой (β), и перемещаясь по ней, мы можем вернуться в точку $(x^{(0)}, x_1^{(0)})$. Значит справедливо равенство

$$x_1^{(0)} = \varphi\ (x_1^{(1)}, x^{(1)}, x^{(0)}).$$

Так как точка $(x^{(1)}, x_1^{(1)})$ была выбрана произвольно, для всех точек (x, x_1) на кривой (β), справедливо равенство:

$$x_1^{(0)} = \varphi\ (x_1, x, x^{(0)}),$$

что и требовалось доказать.

и заменяя в (A) $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ через $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{n-1}^{(0)}$, мы получим собрание

$$
\begin{gathered}
x_1 = \Phi_1(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{n-1}^{(0)}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} = \Phi_{n-1}(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{n-1}^{(0)}),
\end{gathered}
$$

которое не отлично от собрания (A^*).

Действительно, так как уравнения (B) могут быть составлены решением собрания (A) относительно $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, мы имеем тожественно:

$$\Phi_i(x, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) \equiv x_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

и, значит, вследствие (6):

$$\Phi_i(x^{(0)}, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_{n-1}^{(0)}) \equiv x_i^{(0)}.$$

3. Преобразование системы в симметрическую. Умножая каждую из функций $P_1, \ldots, P_{n-1}$ на одну и ту же функцию X и положив

$$X_1 = P_1 X, \; X_2 = P_2 X, \ldots, \; X_{n-1} = P_{n-1} X,$$

мы можем системе (I) дать вид:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx} = \frac{X_{n-1}}{X} \tag{7}$$

или вид

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{dx}{X}. \tag{I'}$$

Про функции $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X$ мы будем предполагать, что они разложимы в ряды по возрастающим степеням

$$x - x^{(0)}, \; x_1 - x_1^{(0)}, \ldots, \; x_{n-1} - x_{n-1}^{(0)}.$$

Чтобы к системе (I') можно было приложить сказанное в § 1, достаточно, чтобы значение X было отлично от нуля при

$$x = x^{(0)}, \; x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, \; x_{n-1} = x_{n-1}^{(0)}.$$

4. Об одном свойстве интегралов системы. Укажем теперь на одно свойство правых частей собрания интегралов (B).

Теорема. *Каждая из функций*

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, \tag{8}$$

стоящих в правых частях уравнений собрания (B), *есть решение уравнения*

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + X \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \tag{II}$$

Если мы в собрании (B) заменим $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ их значениями, взятыми из собрания (A), то мы получим тожества. Следовательно, считая, что в некоторой функции ψ_i аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ заменены их значениями (A), мы имеем в ψ_i постоянную и ее дифференциал равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} dx = 0. \quad (9)$$

Но если $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ взяты из собрания (A), они удовлетворяют системе (I′) и, значит, дифференциалы

$$dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}, dx$$

пропорциональны функциям

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X.$$

Пользуясь этим, из равенства (9) получаем

$$X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-1}} + X \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Равенство (10) кажется устанавливающим зависимость между функциями $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, определенными собранием (A).

Но так как оно не содержит

$$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, \quad (11)$$

то предположение, что оно не тожество, а зависимость между x_1 $x_2, \ldots, x_{n-1}$, говорило бы, что из уравнений (A) можно исключить постоянные (11), а последнее невозможно, так как из уравнений (A) можно найти эти постоянные. Итак равенство (10) тожество и мы имеем, что

$$X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-1}} + X \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \equiv 0, \quad (12)$$

т. е. что результат замены z через ψ_i обращает уравнение (II) в тожество, т. е. что ψ_i есть решение уравнения (II), что и требовалось доказать.

Итак, составив собрание интегралов системы (I), мы тем самым найдем $n-1$ решений уравнения (II).

Отметим, что какова бы ни была функция ω, тожество

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) \equiv \theta(x), \quad (13)$$

в котором $\theta(x)$ некоторая функция от одного x, невозможно. Такое тожество говорило бы, что из уравнений (B) можно исключить $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, но такое предположение невозможно, так как из уравнений (B) можно найти $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и образовать собрание (A).

Поэтому найденные решения

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1} \quad (8)$$

уравнения (II) можно назвать алгебраически независимыми.

5. Две основные теоремы. В заключение докажем две теоремы.

Теорема I. *Какова бы ни была функция* ω *от* $n-1$ *аргументов, функция*

$$\psi = \omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) \tag{14}$$

есть решение уравнения (II).

Дифференцируя функцию (14) по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x$, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\partial\omega}{\partial\psi_i}\,\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\partial\omega}{\partial\psi_i}\,\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}, \ldots,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial\omega}{\partial\psi_i}\,\frac{\partial\psi_i}{\partial x}.$$

Умножая полученные равенства последовательно на $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X$ и складывая их, получаем:

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}} + X\frac{\partial\psi}{\partial x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\partial\omega}{\partial\psi_i}\left(X_1\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_{n-1}} + X\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right).$$

Но на основании тожеств (12) каждое слагаемое в правой части последнего равенства тожественно равно нулю, а это говорит, что ψ действительно решение уравнения (II).

Теорема II. *Если* ψ *некоторое решение уравнения* (II), *то существует функция* ω *от* $n-1$ *аргументов такая, что*

$$\psi = \omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Если ψ решение уравнения (II), то

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}} + X\frac{\partial\psi}{\partial x} \equiv 0. \tag{15}$$

Присоединим к тожеству (15) тожества (12), говорящие, что функции (8) есть решения уравнения (II):

$$X_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_{n-1}} + X\frac{\partial\psi_1}{\partial x} \equiv 0 \tag{8_1}$$

$$X_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_{n-1}} + X\frac{\partial\psi_2}{\partial x} \equiv 0 \tag{8_2}$$

. . . .

. . . .

$$X_1\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + X\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x} \equiv 0. \tag{8_{n-1}}$$

Уравнения (15), (8_1), $(8_2), \ldots, (8_{n-1})$ образуют систему из п однородных уравнений с неизвестными

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X,$$

из которых X не нуль; отлично от нуля, именно, даже его начальное значение. Но система из п однородных уравнений с п неизвестными может иметь решение, в котором не все неизвестные одновременно равны нулю, только тогда, когда определитель из ее коэффициентов нуль. Значит

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}, & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x} \end{vmatrix} \equiv 0. \qquad (16)$$

Определитель в левой части последнего равенства есть якобиан функций $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ по всем их аргументам. Равенство его нулю говорит, что эти функции связаны зависимостью:

$$\Omega(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0. \qquad (17)$$

В определителе (16) не все миноры элементов первой строки равны нулю; отличен от нуля именно минор элемента $\frac{\partial\psi}{\partial x}$; он равен якобиану функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ по аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и равенство его нулю говорило бы, что из системы (B) нельзя найти этих последних аргументов. Значит, как вытекает из самого доказательства теоремы об якобиане, которою мы теперь пользуемся, из зависимости (17) можно найти ψ и написать

$$\psi = \omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}),$$

что и требовалось доказать.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

6. Определение. Линейным уравнением в частных производных называется уравнение вида

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = X, \tag{1}$$

в котором z неизвестная функция от n независимых переменных

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n, \tag{2}$$

а коэффициенты

$$X_1,\ X_2, \ldots\ X_{n-1},\ X_n,\ X$$

функции независимых переменных (2) и z:

$$X_i = X_i\ (x_1, x_2, \ldots,\ x_n, z), X = X\ (x_1,\ x_2 \ldots, x_n, z), (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Если в уравнении (1)

$$X = 0$$

и остальные коэффициенты не зависят от z:

$$X_i = X_i\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n), \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n,)$$

то уравнение называется *однородным*. Мы рассмотрим сначала свойства однородных уравнений.

Отметим, что во всем последующем, иногда этого не оговаривая, мы будем предполагать, что коэффициенты уравнений и другие встречающиеся функции, разложимы в ряды по возрастающим степеням разностей вида

$$x_1 - x_1^{(0)},\ x_2 - x_2^{(0)}, \ldots,\ x_n - x_n^{(0)},$$

где $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, \ldots,$ $x_n^{(0)}$ некоторые числа, т. е., что они голоморфны вблизи точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Такое же предположение мы делаем, если без оговорки говорим об искомом решении.

Будучи голоморфными в некоторой области, заключающей точку $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, коэффициенты уравнений и другие функции имеют внутри этой области производные, которые также голоморфны.

7. Интегрирование однородного уравнения. Положим, что дано однородное уравнение

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{4}$$

коэффициенты которого не зависят от z и, как функции остальных аргументов, голоморфны в некоторой области.

Это уравнение того вида, которому были посвящены рассуждения в Введении; чтобы обратить его в уравнение (II), надо только X_n и x_n заменить через X и x. Основываясь на этом, мы можем утверждать, что уравнение (4) имеет решение, если один из его коэффициентов не равен тождественно нулю.

Положим, например, что X_n не нуль. Составим систему

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{5}$$

Так как $X_n \neq 0$, можно найти числа

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots,\ x_{n-1}^{(0)},\ x_n^{(0)} \tag{6}$$

так, чтобы начальное значение X_n не было нулем. К системе будет применимо все сказанное в § 1; можно будет найти интегралы системы (5); правые части этих интегралов будут решениями уравнения (4).

Если мы каким-нибудь образом найдем алгебраически независимые интегралы системы (5), числом $n-1$:

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_1\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n) = C_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Psi_{n-1}\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n) = C_{n-1}, \end{array}\right\} \tag{7}$$

то этим самым составим и $n-1$ независимых решений уравнения (4):

$$\Psi_{n-1}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ldots,\qquad \Psi_1\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n), \tag{7'}$$

Самым общим решением уравнения (4) будет функция

$$z = \omega\ (\Psi_1,\ \Psi_2, \ldots,\ \Psi_{n-1}), \tag{8}$$

в которой ω произвольная функция от $n-1$ аргументов.

Самое общее решение уравнения (4) зависит, таким образом, от произвольной функции от $n-1$ аргументов.

Примечание. Если коэффициент X_i в системе (5) не равен тождественно нулю, то решения (7′) алгебраически независимы относительно аргументов

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1}, \ldots,\ x_n.$$

Предположим противное, а именно, что из уравнений (7) нельзя найти указанных аргументов, но можно их исключить. Тогда имеет место тожество

$$\omega\ (\Psi_1,\ \Psi_2, \ldots,\ \Psi_{n-1}) \equiv \theta\ (x_i).$$

Но левая часть тожества по теореме (1) § 5 есть решение уравнения (4); значит функция $\theta(x_i)$ его решение.

Подставляя вместо z это решение в уравнение (4), получаем тожество

$$X_i \cdot \theta'(x_i) \equiv 0,$$

которое, так как $X_i \neq 0$, говорит, что $\theta'(x_i) \equiv 0$, т е., что $\theta(x_i)$ от x_i не зависит, и значит постоянное. Но тогда функции (7′) не алгебраически независимы.

8. **Задача Коши.** Обыкновенно задачи, приводящие к интегрированию уравнения, не требуют нахождения всех решений уравнения (4). Часто ищется только то решение, в котором функция z удовлетворяет некоторым, заранее поставленным, условиям.

Если найдено самое общее решение (8) уравнения (4), то для нахождения указанного искомого решения приходится подбирать еще функцию ω так, чтобы поставленные условия были соблюдены; но можно также и сразу искать нужное решение, не вводя предварительно в рассмотрение самого общего решения (8).

Очень часто, отыскивая решение уравнения, ставят следующее условие.

Даны число $x_n^{(0)}$ и функция

$$\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Найти то решение z уравнения (4) в котором, если

$$x_n = x_n^{(0)},$$

то

$$z = \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{9}$$

Эту задачу нахождения такого решения, мы назовем *задачей Коши*. Для пояснения поставленной задачи рассмотрим случай двух независимых переменных. Положим, дано уравнение

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0. \tag{4′}$$

Всякое решение уравнения определяет некоторую поверхность. Можно сказать, что уравнение (4′) определяет семейство поверхностей. Условие (9) имеет вид:

если

$$x_2 = x_2^{(0)},$$

то

$$z = \vartheta(x_1). \tag{9′}$$

Уравнения: $x_2 = x_2^{(0)}$, $z = \vartheta(x_1)$ определяют некоторую кривую, лежащую в плоскости, параллельной плоскости $X_1 Z$.

Если условие (9′) соблюдено, то поверхность проходит через эту кривую.

Значит, поставленная задача равносильна следующей: из семейства поверхностей, определенных уравнением (4′), выбрать ту, которая проходит через наперед заданную кривую, лежащую в плоскости, параллельной плоскости $X_1 Z$.

Покажем теперь, как решать поставленную задачу, и докажем, что мы имеем решение, если соблюдено условие: результат замены в коэффициенте X_n аргумента x_n числом $x_n^{(0)}$ не равен тождественно нулю. Если результат этой подстановки не равен нулю, то можно из области задания выбрать числа

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots,\ x_{n-1}^{(0)} \tag{10}$$

таким образом, что результат замены в X_n аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ ими и числом $x_n^{(0)}$ не был нулем; мы предполагаем, что $x_n^{(0)}$ таково, что точка $(x_1^{(10)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)})$ лежит в области задания коэффициентов $X_1, X_2, \dots, X_n$. Тогда из сказанного в § 1 вытекает, что для системы (5) можно составить интегралы Коши.

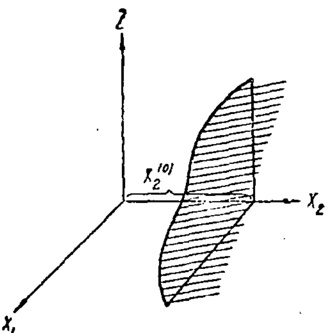

Рис. 1.

В § 2 пояснено, как найти их, когда известно некоторое собрание интегралов системы (5):

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_1\ (x_1,\ x_2, \dots,\ x_{n-1},\ x_n) = C_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Psi_{n-1}\ (x_1,\ x_2, \dots,\ x_{n-1},\ x_n) = C_{n-1}.\end{array}\right\} \tag{11}$$

Нужно найти $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ по формулам:

$$\begin{array}{l}\Psi_1\ (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots,\ x_{n-1}^{(0)},\ x_n^{(0)}) = C_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Psi_{n-1}\ (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots,\ x_{n-1}^{(0)},\ x_n^{(0)}) = C_{n-1}\end{array}$$

и решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_1\ (x_1,\ x_2, \dots,\ x_{n-1},\ x_n) = \Psi_1\ (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots,\ x_{n-1}^{(0)},\ x_n^{(0)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Psi_{n-1}\ (x_1,\ x_2, \dots,\ x_{n-1},\ x_n) = \Psi_{n-1}\ (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots,\ x_{n-1}^{(0)},\ x_n^{(0)})\end{array}\right\} \tag{11′}$$

относительно

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots,\ x_{n-1}^{(0)}.$$

Найденные уравнения

$$\begin{gathered}
x_1^{(0)} = \varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1}^{(0)} = \varphi_{n-1} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)
\end{gathered}$$

будут интегралами Коши системы (5), а функции

$$\left.\begin{array}{c}
\varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), \ldots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{n-1} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)
\end{array}\right| \tag{12}$$

решениями уравнения (4).

Решения (12) оказываются не случайно выбранными. По формулам (4) § 1 мы имеем тожественно:

$$\left.\begin{array}{c}
\varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) \equiv x_1, \ldots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{n-1} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) \equiv x_{n-1};
\end{array}\right\} \tag{13}$$

значит функции (12) решают, соответственно, задачу Коши при предположениях:

$$\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \equiv x_1, \ldots, \vartheta (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \equiv x_{n-1}.$$

Решения (12), удовлетворяющие условиям (13), мы назовем для удобства *главными*, иногда прибавляем „соответственно $x_n = x_n^{(0)}$“.

Когда найдены главные решения, мы найдем решение z задачи Коши, заменив в функции ϑ аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ соответственно через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, т. е. положив

$$z = \vartheta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}). \tag{14}$$

Действительно, так как при $x_n = x_n^{(0)}$ функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ обращаются на основании (13) соответственно в $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, функция (14) при $x_n = x_n^{(0)}$ обратится в $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Найденное нами решение задачи Коши единственное. Действительно, положим, что имеется у уравнения (4) еще другое решение Z, в котором, при $x_n = x_n^{(0)}$ функция Z обращается также в $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Ясно, что разность

$$z - Z$$

будет также решением уравнения (4); при этом решением, обращающимся в нуль при $x_n = x_n^{(0)}$, так как при этом значении x_n как z, так и Z обращаются в ту же функцию $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Но как решение уравнения (4), $z - Z$ будет функцией от его $n-1$ независимых решений, за которые можно взять и главные.

Итак,

$$z - Z = \omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}).$$

Подставляя $x_n^{(0)}$ вместо x_n, из последнего равенства получаем

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \equiv 0,$$

откуда ясно, что функция ω тожественна нулю и $z \equiv Z$, что и требовалось доказать.

Пример. Найти поверхность, определенную уравнением:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (4_1')$$

и проходящую через кривую

$$x = 0, \ z = \vartheta(y).$$

Прежде всего замечаем, что при $x = 0$ коэффициент при $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ не равен нулю. Значит задача имеет решение.

Уравнению $(4_1')$ соответствует система

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Дав последнему уравнению вид

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

находим его интеграл

$$x^2 + y^2 = C.$$

Ищем интеграл Коши. Решая уравнение

$$x^2 + y^2 = 0^2 + y_0^2 = y_0^2$$

относительно y_0, получаем

$$y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Главное решение уравнения $(4_1')$, соответствующее $x = 0$, есть

$$\sqrt{x^2 + y^2};$$

искомое решение

$$z = \vartheta(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Если ϑ — произвольная функция, то на последнее равенство можно смотреть как на произвольное решение.

Из этого ясно, что уравнение $(4_1')$ определяет поверхность вращения около оси OZ.

Примечание. Мы указали, что решение задачи Коши можно было бы получить из самого общего решения уравнения (4):

$$z = \omega(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}) \qquad (8)$$

подобающим подбором функции ω. Покажем, как выполнять этот подбор. Для этого можно поступать так: положим

$$\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \Psi_1^{(0)}, \ldots, \Psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \Psi_{n-1}^{(0)}.$$

Если мы в (8) заменим x_n через $x_n^{(0)}$, то z обратится в $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, и мы будем иметь тожество:

$$\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \equiv \omega(\Psi_1^{(0)}, \Psi_2^{(0)}, \ldots, \Psi_{n-1}^{(0)}). \tag{15}$$

Значит задача сведена к нахождению такой функциа ω, чтобы равенство (15) было тожеством. Чтобы найти такую функцию, полагаем

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_1^{(0)} = \Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \xi_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_{n-1}^{(0)} = \Psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \xi_{n-1} \end{array}\right\} \tag{16}$$

и решаем уравнения (16) относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, что всегда возможно, так как коэффициент X_n по предположению не нуль.

Если при этом мы получим:

$$x_1 = \alpha_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \alpha_{n-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}),$$

то после подстановки найденных значений в (15) мы дадим этому тожеству вид:

$$\vartheta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1});$$

последнее тожество определяет вид функции ω.

Сравнение системы (16) с системой (11) говорит, что, применяя тот или иной метод, мы решаем алгебраически тожественные задачи.

9. Особый случай задачи Коши. Мы указали, что указанный нами прием неприменим, когда коэффициент X_n обращается в нуль после замены в нем аргумента x_n его значением $x_n^{(0)}$.

Из этого, конечно, еще нельзя сделать вывода, что задача не имеет решения; это обстоятельство говорит пока только о несовершенстве методы. Однако можно установить, что в этом случае всегда имеет место одно из двух: или задача не имеет голоморфного решения, или задача имеет множество решений.

Убедимся сначала, что задача может не иметь решений. Условимся временно обозначать знаком $(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n))$ результат замены аргумента x_n числом $x_n^{(0)}$ в функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n),$$

т. е. функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)})$. Заметим, что значение производной от z по некоторому аргументу x_i, отличному от x_n, при $x_n = x_n^{(0)}$, мы можем найти, подставив сначала в z число $x_n^{(0)}$ вместо x_n и только затем, выполнив дифференцирование, так как при дифференцировании по x_i аргумент x_n считается постоянным. Значит

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial (z)}{\partial x_i} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i},$$

если z есть решение задачи Коши, определенной условием (9). Понимая под z это решение, мы имеем тожество

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} \equiv 0.$$

Заменив в этом тожестве x_n через $x_n^{(0)}$, мы получаем, так как $(X_n) = 0$:

$$(X_1) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + (X_2) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + \ldots + (X_{n-1}) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}} \equiv 0, \tag{17}$$

если, конечно, $\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$ ограниченно, что мы предполагаем, говоря только о решениях голоморфных вблизи начальных значений аргументов.

Итак, функция ϑ не может быть выбираема произвольно, а должна удовлетворять уравнению

$$(X_1) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + (X_2) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + \ldots + (X_{n-1}) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}} = 0, \tag{17_1}$$

и, если она этому уравнению не удовлетворяет, то задача Коши голоморфных решений не имеет.

Мы покажем впоследствии, что, при соблюдении условия (17), задача Коши имеет бесчисленное множество решений; исследование этого вопроса требует знакомства с теорией неоднородных линейных уравнений.

10. Общая задача Коши. Вместо того чтобы отыскивать решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям § 8, можно поставить задачу:

Найти то решение уравнения (4), которое после подстановки в него вместо x_n функции $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ обращается в функцию $\vartheta(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$, т. е. такое, в котором,

$$\text{если } x_n = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \text{ то } z = \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{18}$$

Для случая двух переменных последнее условие имеет вид:

$$\text{если } x_2 = \theta(x_1), \text{ то } z = \vartheta(x_1).$$

Так как уравнения

$$x_2 = \theta(x_1), \; z = \vartheta(x_1)$$

определяют произвольную кривую в пространстве, в обобщенной задаче предлагается, вместо поверхности, определенной кривой, лежащей в плоскости, параллельной плоскости Zx_1, искать поверхность, заключающую кривую, произвольно расположенную в пространстве.

Решение этой общей задачи можно свести к решению задачи § 8, введя вместо x_n новую независимую переменную ξ по формуле

$$x_n - \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \xi \tag{19}$$

и решая задачу Коши для преобразованного уравнения при условии:

$$\text{если } \xi=0, \quad \text{то } \bar{z}=\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{18'}$$

Чтобы выяснить обстоятельства, сопровождающие решение задачи, выполним в уравнении (4) преобразование (19).

Обозначая для удобства неизвестную функцию z как функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, ξ через $\bar{z}$, а результат замены в коэффициенте X_i аргумента x_n суммой $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})+\xi$ через $\bar{X}_i$, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i}-\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}\frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, \ldots, n-1; \quad \frac{\partial z}{\partial x_n}=\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi};$$

вследствие этого уравнение (4) принимает вид

$$\bar{X}_1\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1}+\bar{X}_2\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2}+\ldots+\bar{X}_{n-1}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_{n-1}}+$$
$$+\left(\bar{X}_n-\bar{X}_1\frac{\partial \theta}{\partial x_1}-\bar{X}_2\frac{\partial \theta}{\partial x_2}-\ldots-\bar{X}_n\frac{\partial \theta}{\partial x_{n-1}}\right)\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}=0.$$

Решение задачи Коши при условии (18′) нам доступно, если коэффициент при $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}$:

$$\bar{X}_n-\bar{X}_1\frac{\partial \theta}{\partial x_1}-\ldots-\bar{X}_{n-1}\frac{\partial \theta}{\partial x_{n-1}} \tag{20}$$

не обращается в нуль при $\xi=0$.

В этом случае мы сумеем найти $\bar{z}$ и, заменяя в ней ξ его выражением (19), искомую функцию z.

Если же это условие не соблюдено, т. е. если

$$X_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \theta)-X_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_1}-\ldots-$$
$$-X_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_{n-1}}\equiv 0,$$

мы поставленную задачу решать не умеем. Из этого, конечно, не вытекает, как мы уже упоминали, что она решений не имеет. Может обнаружиться одно из двух: или задача не имеет решений, или она имеет множество решений. Из сказанного в § 8 ясно, что задача наверное не имеет голоморфного решения, если функция $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ не удовлетворяет уравнению (17_1), в котором теперь

$$(X_i)=X_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \theta).$$

Познакомившись с теорией неоднородных уравнений, мы покажем, что и в этом случае задача имеет бесчисленное множество решений, когда условие (17) соблюдено.

Теперь же отметим, что мы, очевидно, имеем дело с исключительным случаем в задаче Коши, если многообразие (18), измерение которого $n-1$, есть пересечение двух решений уравнения (4): оно принадлежит сразу двум решениям и потому решение по нему задачи Коши не может приводить к определенному результату.

В этом, впрочем, легко убедиться и при помощи непосредственных вычислений.

В случае, когда задача Коши не имеет определенного решения, а имеет множество решений, многообразие (18) называется характеристикой, расположенной на каждом из этих решений. Таким образом, всякие два решения уравнения (4) имеют общую характеристику.

11. Характеристические линии. Положим, имеется некоторое решение

$$z = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{8'}$$

уравнения (4).

Система уравнений (7) и уравнение (8') определяют n из аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, z$ в функции от $(n+1)$-го, например, $z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ в функции от x_n.

Заимствуя терминологию из геометрии, мы можем сказать, что уравнения (7) и (8') определяют линию в пространстве $n+1$ измерений, притом, так как $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ произвольны, то не одну, а семейство таких линий.

Продолжая аналогию с пространством трех измерений, мы можем сказать, что уравнения

$$\Psi_1 = C_1, \ \Psi_2 = C_2, \ldots, \Psi_{n-1} = C_{n-1} \tag{7}$$

определяют проекции линий этого семейства в пространство n измерений:

$$z = 0,$$

и что каждая линия нашего семейства есть линия пересечения цилиндра (7) с поверхностью (8'), а самая поверхность (8') есть геометрическое место этих линий.

В дальнейшем линии, определенные таким образом, мы будем называть *характеристическими линиями, расположенными на решении* (8'); семейство этих линий зависит от $n-1$ параметров.

Линии пересечения цилиндров (7) с поверхностью

$$\Psi_n \equiv z = c, \tag{21}$$

где c произвольный параметр, мы назовем *характеристическими линиями уравнения* (4); из данного определения вытекает, что в случае линейного однородного уравнения его характеристические линии зависят от n параметров.

Так как равенства (7) интегралы системы (5), можно сказать, что характеристические линии уравнения (4) определены системой

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{0}. \tag{5'}$$

Про систему (5) мы также будем говорить, что она определяет характеристические линии, так как ею определен цилиндр (7).

Чтобы из семейства характеристических линий уравнения получить семейство характеристических линий решения, надо c заменить функцией остальных параметров:

$$c = \omega(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1});$$

чтобы получить самую интегральную поверхность, надо найти геометрическое место этих последних линий, т. е. исключить параметры $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ из уравнений (7) и (21), что непосредственно приводит к уравнению (8).

Из данного в прошлом параграфе определения характеристики вытекает, что она есть геометрическое место характеристических линий уравнения (4), зависящих от $n-2$ параметров.

Действительно, если она есть пересечение интегральных поверхностей

$$z = \omega_1(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}),\ z = \omega_2(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}),$$

то она может быть получена из уравнений (7) и (21) подстановкой $c = \omega_1(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$, $\omega_1(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = \omega_2(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ и исключением оставшихся произвольными $n-2$ параметров. Не трудно убедиться и в обратном. Замена $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ и c функциями от некоторых новых $n-2$ параметров и исключение их приводит к характеристике, если в результате исключения получаются две зависимости, одна из которых содержит z.

Если в результате такого исключения мы получим зависимости

$$z = \omega(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}),\ \varphi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}) = 0, \tag{22}$$

и если из второй из них можно найти x_n, то найденная функция x_n удовлетворяет уравнению (20). Положим, что второе из уравнений (22) дает

$$x_n = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Сохраняя обозначения § 10, т. е. понимая под (Ψ_i), (X_i) результат замены в Ψ_i и X_i аргумента x_n через θ, и замечая, что второе из уравнений (22) обращается в тожество заменой x_n через θ, мы получаем, дифференцируя это тожество:

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial(\Psi_k)}\left(\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial(\Psi_k)}\left(\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_n}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \equiv 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Умножая последнее тожество на (X_i), давая i значения $1, 2, \ldots, n-1$ и складывая полученные произведения, находим:

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial(\Psi_k)} \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_i}\right)(X_i) + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial(\Psi_k)}\left(\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_n}\right)\sum_{i=1}^{i=n-1}(X_i)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Но так как каждое Ψ_k есть решение уравнения (4),

$$X_1 \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_1} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_{n-1}} + X_n \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_n} \equiv 0$$

и, значит,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} (X_i) \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i}\right) \equiv -(X_n) \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_n}\right).$$

В силу этого полученное нами равенство дает

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial (\Psi_k)} \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_n}\right) \left\{ \sum_{i=1}^{i=n-1} (X_i) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - (X_n) \right\} \equiv 0,$$

т. е. приводит к уравнению (20), так как первый множитель не нуль; иначе нельзя было бы найти x_n из второго уравнения (22).

Соблюдение условия (17) есть следствие соблюдения условий (20) и того, что первое из равенств (22) дает решение уравнения (4).

12. Примеры. 1) Найти все решения уравнения

$$(a_2 x_3 - a_3 x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + (a_3 x_1 - a_1 x_3) \frac{\partial z}{\partial x_2} + (a_1 x_2 - a_2 x_1) \frac{\partial z}{\partial x_3} = 0.$$

Ищем интегралы системы характеристических линий

$$\frac{dx_1}{a_2 x_3 - a_3 x_2} = \frac{dx_2}{a_3 x_1 - a_1 x_3} = \frac{dx_3}{a_1 x_2 - a_2 x_1}.$$

Умножая числителей и знаменателей дробей последовательно на a_1, a_2, a_3 и на x_1, x_2, x_3 и пользуясь теоремой о равных отношениях, заключаем, что

$$\frac{dx_1}{a_2 x_3 - a_3 x_2} = \frac{dx_2}{a_3 x_1 - a_1 x_3} = \frac{dx_3}{a_1 x_2 - a_2 x_1} =$$

$$= \frac{a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3}{0} = \frac{x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3}{0}.$$

Значит,

$$a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3 = 0, \quad x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3 = 0.$$

Интегралы системы:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = C_1, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C.$$

Два независимых решения уравнения:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

самое общее его решение

$$z = \omega(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

где $\omega(\xi, \eta)$ произвольная функция от ее аргументов.

2) Найти то решение уравнения

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

в котором

$$\text{при } x_1 = x_1^{(0)}: \quad z = \vartheta(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Задача наверное имеет решение только тогда, когда $x_1^{(0)} \neq 0$; иначе коэффициент при $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ обращается в нуль при начальном значении x_1.

Составляем систему:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n};$$

ее интегралы легко находим, сравнивая все отношения с первым:

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad \frac{x_3}{x_1} = C_2, \ldots, \quad \frac{x_n}{x_1} = C_n.$$

Для нахождения интегралов Коши подставляем $x_1^{(0)}$ вместо x_1, и $x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ вместо остальных переменных, и определенные таким образом постоянные $C_2, \ldots, C_n$ снова подставляем в найденную систему интегралов. Получаем:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^{(0)}}{x_1^{(0)}}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_3^{(0)}}{x_1^{(0)}}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{x_1} = \frac{x_n^{(0)}}{x_1^{(0)}}.$$

Решая уравнения относительно $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, получаем интегралы Коши:

$$\frac{x_2}{x_1} x_1^{(0)} = x_2^{(0)}, \quad \frac{x_3}{x_1} x_1^{(0)} = x_3^{(0)}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{x_1} x_1^{(0)} = x_n^{(0)}.$$

Главные решения уравнения

$$\frac{x_2}{x_1} x_1^{(0)}, \quad \frac{x_3}{x_1} x_1^{(0)}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{x_1} x_1^{(0)}.$$

Заменяя в функции ϑ аргументы $x_2, x_3, \ldots, x_n$ теми главными решениями, которые обращаются в эти аргументы при $x_1 = x_1^{(0)}$, получаем искомое решение:

$$z = \vartheta\left(\frac{x_2}{x_1} x_1^{(0)}, \frac{x_3}{x_1} x_1^{(0)}, \ \ldots, \ \frac{x_n}{x_1} x_1^{(0)}\right).$$

3) Мы видели, что уравнение

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (4_1)$$

определяет поверхности вращения около оси OZ.

Ясно, что нельзя найти определенной поверхности вращения, проходящей через круг, лежащий в плоскости, перпендикулярной к оси вращения с центром на этой оси. Указанные круги и есть характеристики уравнения ($4_1'$). Ищем решение, в котором

$$\text{если } y=\theta(x), \text{ то } z=\vartheta(x).$$

Положим, как указано,

$$y-\theta(x)=\xi;$$

мы преобразуем уравнение ($4_1'$) в

$$(\theta(x)+\xi)\frac{\partial z}{\partial x}-[x+(\theta(x)+\xi)\,\theta'(x)]\frac{\partial z}{\partial \xi}=0,$$

для которого должны искать решение по условиям:

$$\text{если } \xi=0, \text{ то } z=\vartheta(x).$$

Если

$$x+\theta(x)\,\theta'(x)=0,$$

т. е. если

$$\theta(x)=\sqrt{C^2-x^2},$$

уравнение имеет решение только тогда, когда ϑ равно постоянному равно C_1; одно из его решений $z=C_1$.

Всякая поверхность вращения, имеющая осью OZ и заключающая круг

$$x^2+y^2=C^2, \; z=C_1$$

есть его решение, удовлетворяющее поставленным условиям.

4) Найти решение уравнения:

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=0,$$

в котором

$$\text{при } x_1=0\text{: } z=\theta(x_2).$$

Рассматриваемое уравнение—частный случай уравнения примера второго. Мы имеем дело со случаем, когда по данному нами правилу мы не умеем находить решений. По сказанному в § 9, для того, чтобы вообще могло существовать голоморфное решение задачи, функция $\theta(x_2)$ должна удовлетворять уравнению (17), которое в данном случае имеет вид:

$$x_2\,\theta'(x_2)=0,$$

откуда

$$\theta(x_2)=a,$$

a постоянное.

Итак, задача может только тогда иметь голоморфное решение, когда $\theta(x_2)$ постоянная. Линия

$$x_1=0, \; z=a$$

есть характеристика. Не трудно убедиться непосредственной подстановкой, что, например,

$$z=a+\frac{x_1 b}{x_1-x_2},$$

где b произвольно, удовлетворяет уравнению, обращаясь в a при $x_1 = 0$, и что уравнение, действительно, имеет бесчисленное множество решений, удовлетворяющих поставленным условиям.

Предложим себе теперь найти решение при условии: если

$$x_1 = \vartheta(x_2), \text{ то } z = \theta(x_2).$$

Положив

$$x_1 - \vartheta(x_2) = \xi,$$

имеем для преобразованного уравнения

$$(\xi + \vartheta(x_2) - x_2 \vartheta'(x_2)) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} + x_2 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} = 0.$$

Уравнение не имеет определенного голоморфного решения, если коэффициент при $\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}$ равен нулю при $\xi = 0$, т. е., если

$$\vartheta(x_2) - x_2 \vartheta'(x_2) = 0$$

или

$$\vartheta(x_2) = c x_2.$$

При $x_1 = c x_2$ функция $\theta(x_2)$ не может быть произвольной, если $\bar{z}$ должно быть голоморфной при $\xi = 0$; уравнение имеет вид

$$\xi \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} + x_2 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} = 0$$

и требует, как мы убедились выше, чтобы $\theta(x_2)$ была постоянной.

Значит характеристики рассматриваемого уравнения

$$x_1 = c x_2, \quad z = a.$$

Так как самое общее решение уравнения дается равенством

$$z = \omega\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

ясно, что поверхности, определяемые уравнением, образуются движением прямой

$$x_2 = b x_1, \quad z = \omega(b),$$

(b — переменный параметр) параллельной плоскости $X_1 X_2$ и пересекающей ось OZ. Каждая из этих прямых есть характеристика.

Поверхности, определенные уравнением, называются коноидами.

13. Уравнение с последним членом. Рассмотрим теперь уравнение

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = X, \tag{23}$$

считая, что в нем коэффициенты $X_1, \ldots, X_n$, X зависят от x_1, $x_2, \ldots, x_n, z$. Попробуем вместо z искать уравнение вида

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0, \tag{24}$$

из которого можно найти z, удовлетворяющее уравнению (23).

Дифференцируя уравнение (24), мы получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial x_2}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial x_n}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

откуда находим производные от z, выраженные неявно через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи z:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial z}},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}} \tag{25}$$

Но уравнение (23) связывает производные от z, выраженные явно через $x_1, x_2, \ldots, x_n$; чтобы из (25) найти те производные от z, которые входят в уравнение (23), надо из правых частей (25) исключить z, найдя его из уравнения (24).

Обозначая для удобства знаком $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z))$ результат подстановки в функцию $f(x_1, x_2, \ldots x_n, z)$, вместо z его значения, найденного из (24), заключаем, что в уравнении (23) надо полагать

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)},\quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=-\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}=-\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)}, \tag{25_1}$$

после чего оно обращается, если мы и в коэффициентах заменим z его значением, в тожество

$$-(X_1)\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)}-(X_2)\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)}-\ldots-(X_n)\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)}\equiv(X),$$

или

$$(X_1)\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)+(X_2)\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)+\ldots+(X_n)\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)+(X)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\equiv 0. \tag{26}$$

Итак, если уравнение (24) дает решение уравнения (23), то уравнение

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+X\frac{\partial V}{\partial z}=0 \tag{27}$$

должно обращаться в тожество после замены в нем z значением, найденным из уравнения (24).

Задача, к которой мы свели нахождение z, представляет повидимому бо́льшие трудности, чем интегрирование уравнения (23): надо искать такую функцию $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$, чтобы равенство (27) делалось тожеством после замены в нем z функцией, обращающей $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ в нуль.

Но ясно, что если мы найдем функцию V так, чтобы она удовлетворяла уравнению (27), т. е. чтобы было

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+X\frac{\partial V}{\partial z}\equiv 0, \qquad (27_1)$$

то тожество (27_1) останется тожеством, чтобы мы ни подставляли в него вместо z, и следовательно, останется тожеством, если мы заменим z решением уравнения

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0, \qquad (24)$$

полученного приравниванием нулю найденной функции V. Так как оно обратится после этого в тожество (26), из этого вытекает, что z, данное уравнением (24), удовлетворяет уравнению (23).

Итак, проинтегрировав однородное уравнение (27) и приравняв нулю функцию V, найденную таким интегрированием, мы получим уравнение, дающее функцию z, удовлетворяющую уравнению (23).

Нет, однако, оснований утверждать, что, поступая описанным способом, мы найдем все решения уравнения (23), так как из справедливости при некоторой функции V тожества (26) не вытекает, что тожество (27_1) также имеет место. И действительно, интегрируя уравнение (23) по описанному правилу, мы можем иногда потерять некоторые его решения. Эти решения, называемые *особенными*, обладают, однако, резко выраженными специальными свойствами, благодаря чему они смогут быть найдены особыми приемами.

Вследствие этого, как мы увидим, указанный нами прием, несмотря на его видимую грубость, можно считать исчерпывающим задачу.

14. Решения обыкновенное и особенное. Положим

$$z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (28)$$

есть решение уравнения (23). Мы назовем его обыкновенным, если оно может быть получено из некоторого другого решения этого уравнения

$$z=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a), \qquad (28_1)$$

зависящего от произвольного параметра a, заменою a нулем. В этом случае имеем тожество

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0).$$

Уравнение (28_1), вследствие произвольности a, определяет семейство решений и, значит, обыкновенное решение есть одно из семейства решений, зависящих от одного параметра.

Особенным мы назовем решение, если оно не может быть получено указанным образом из решений, зависящих от параметра.

Теорема. *Всякое обыкновенное решение уравнения* (23) *может быть найдено* описанной выше *методой, состоящей* в *интегрировании уравнения* (27) *и* в *решении уравнения* (24), *полученного приравнением нулю найденного решения уровнения* (27).

Положим, что
$$z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{28}$$
обыкновенное решение, принадлежащее семейству
$$z=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a). \tag{28_1}$$
Положим, что (28) получается из (28_1) заменою a нулем.

Решим (28_1) относительно a:
$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=a$$
и составим уравнение
$$V=W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)-a=0. \tag{29}$$
Уравнению (29) удовлетворяет функция (28_1); заменив в нем a нулем, мы получим уравнение
$$V=W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0, \tag{29_1}$$
которому удовлетворяет функция (28).

Чтобы убедиться в справедливости теоремы, надо показать, что функция V удовлетворяет уравнению
$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+X\frac{\partial V}{\partial z}=0, \tag{27}$$
т. е., что справедливо тожество
$$X_1\frac{\partial W}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial W}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial W}{\partial x_n}+X\frac{\partial W}{\partial z}\equiv 0. \tag{30}$$
Приступая к доказательству, отметим, что подстановка в (28_1) на место a функции W обращает равенство в тожество:
$$z\equiv\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, W); \tag{31}$$
W, именно, найдено решением уравнения (28_1) относительно a.

Положим, что тожество (30) может быть несправедливо; во всяком случае, левая часть (30) некоторая функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$:
$$X_1\frac{\partial W}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial W}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial W}{\partial x_n}+X\frac{\partial W}{\partial z}=\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, z). \tag{32}$$
Так как (28_1) есть решение уравнения (23), то замена в левой части (27) z его значением, найденным из уравнения (29), т. е. функцией ψ, должно обращать ее тожественно в нуль, значит
$$(X_1)\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)+(X_2)\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)+\ldots+(X_n)\left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)+(X)\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)=$$
$$=\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\equiv 0.$$
Чем бы мы ни заменяли a в тожестве
$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, \ldots, x_n, a))\equiv 0,$$
тожество сохранится; подставим в него W на место a. Мы получим на основании (31)
$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, W))\equiv\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\equiv 0,$$
т. е. что тожество (30) действительно имеет место.

15. Характеристические линии. Заменив интегрирование уравнения

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=X \tag{23}$$

интегрированием уравнения

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+X\frac{\partial V}{\partial z}=0 \tag{27}$$

и нахождением z из уравнения

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0, \tag{24}$$

мы должны прежде всего искать независимые интегралы системы характеристических линий уравнения (27)

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{X}. \tag{33}$$

Если эти интегралы:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=C_1\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=C_n,\end{array}\right\} \tag{34}$$

то самое общее значение V равно произвольной функции от их левых частей:

$$V=\Omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_n),$$

а самое общее уравнение, дающее обыкновенное решение z уравнения (23):

$$\Omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_n)=0. \tag{35}$$

Последнему уравнению, решая его относительно ψ_n, можно дать вид

$$\psi_n=\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{35$_1$}$$

понимая под ω произвольную функцию.

Уравнения (34), число которых n, определяют в пространстве $n+1$ измерений многообразия одного измерения, т. е. линии. Семейство линий (34) зависит от n параметров $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$, C_n; мы назовем эти линии *характеристическими линиями уравнения* (23). Характеристические линии линейного уравнения с n независимымипе ременными заключают, таким образом, n параметров. Чтобы получить, при помощи линий (34), решение уравнения (23), надо связать эти параметры одной зависимостью

$$\Omega(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n)=0 \tag{36}$$

или, что то же самое, заменить их функциями других $n-1$ параметров, выбранными так, чтобы исключение этих новых параметров приводило к одной зависимости (36), и исключить эти новые параметры из уравнений (34). Например, для получения уравнения (35$_1$), достаточно положить

$$C_n=\omega(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}).$$

Семейство линий, зависящих от $n-1$ параметров, составленное указанным выше образом, мы назовем семейством характеристических линий решения уравнения (23). Чтобы по семейству характеристических линий решения получить самое решение, надо из уравнений семейства исключить определяющие его параметры; другими словами, всякое обыкновенное решение уравнения (23) определяет поверхность, которую можно трактовать как геометрическое место характеристических линий.

Систему (33), определяющую интегралы (34), мы назовем *системой характеристических линий*.

16. Задача Коши. Найти то решение уравнения (23), в котором

$$\text{при } x_n = x_n^{(0)} \quad z = \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{37}$$

Для решения этой задачи ищем то решение уравнения (27), в котором

$$\text{при } x_n = x_n^{(0)}:$$

$$V = z - \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{37_1}$$

Положим, что $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, z)$ есть такое решение и z найдено из уравнения

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, z) = 0.$$

То значение, которое принимает z при $x_n = x_n^{(0)}$, мы найдем, подставив в последнее уравнение $x_n^{(0)}$ вместо x_n; но вследствие выбора функции V последнее уравнение обратится в

$$z - \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0,$$

откуда ясно, что начальное значение z равно $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

По поводу сказанного, однако, следует отметить одно обстоятельство довольно деликатного характера.

Было разъяснено, что мы не сумеем найти искомое решение уравнения (27), если в нем коэффициент X_n обращается в нуль после замены x_n его значением $x_n^{(0)}$.

Если коэффициент X_n зависит от z, то может случиться, что он не обращается тождественно в нуль при $x_n = x_n^{(0)}$, но делается равным нулю, если мы сверх этого заменим z через $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. В этом случае у нас не может быть уверенности, что, решая уравнение (24), мы найдем для z функцию, которая была бы голоморфна вблизи точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)})$ при всяком выборе чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$, ни также уверенности, что найденное значение V, если его найти можно, единственное.

Действительно, решая уравнение (24), мы должны за начальное значение искомой функции z брать число $\vartheta(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})$. Но если X_n обращается в нуль после замены x_n через $x_n^{(0)}$, а z через $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, X_n равен нулю в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}, z_0)$, и на основании сказанного в § 1 у нас нет уверенности в существовании у системы (33) решения, обращающегося в $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$,

$z_0 = \vartheta(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})$ при $x_n = x_n^{(0)}$ и голоморфного вблизи точки $x_n^{(0)}$. Все же заключения введения предполагали, что такое решение существует и голоморфно.

Для решения общей задачи Коши: найти решение уравнения (23) таким образом, чтобы при

$$x_n = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) : z = \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{38}$$

полагаем в уравнении (27)

$$x_n - \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \xi, \tag{19}$$

и ищем то решение преобразованного уравнения, в котором

$$\text{при } \xi = 0 \qquad V = z - \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Указанное преобразование можно, конечно, выполнить и в самом уравнении (23) и затем искать его решение по правилам, указанным в начале параграфа. Конечно, все сказанное там остается в силе и, значит, не при всякой $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ задача имеет определенное решение.

Если задача, определенная условиями (38), имеет множество решений, то многообразие (38), имеющее п — 1 измерений, мы назовем характеристикой, расположенной на каждом из этих решений. Данное определение равносильно следующему: характеристикой, расположенной на некотором решении уравнения (23), называется многообразие измерения п — 1, принадлежащее этому и какому-нибудь другому решению уравнения (23). Очевидно, что, выбрав при постановке задачи Коши за (38) указанное многообразие, мы должны восстановить как взятое решение, так и указанное другое.

17. Примеры. Несколько откладывая исследование случаев, в которых задача Коши не имеет определенного решения, приведем сначала несколько примеров.

1) Найти общее решение уравнения

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 1. \tag{39}$$

Отыскивая z как решение уравнения

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

получаем, что в случае обыкновенного решения функция V удовлетворяет уравнению:

$$a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{40}$$

Интегрируя систему характеристических линий

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{1},$$

получаем интегралы

$$x_1 - a_1 z = C_1, \ x_2 - a_2 z = C_2 \ldots, x_n - a_n z = C_n.$$

Отсюда ясно, что

$$x_1 - a_1 z, \quad x_2 - a_2 z, \ \ldots, x_n - a_n z$$

независимые решения уравнения (40_1) и что

$$V(x_1 - a_1 z, \ x_2 - a_2 z, \ \ldots, x_n - a_n z)$$

самое общее его решение. Самое общее решение уравнения (39) получаем, решая уравнение

$$V(x_1 - a_1 z, \ x_2 - a_2 z, \ \ldots, x_n - a_n z) = 0.$$

Чтобы интерпретировать полученный результат, рассмотрим случай, когда $n = 2$. Уравнение (39) принимает вид

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 1. \tag{39_1}$$

Самое общее его решение дано уравнением

$$V(x_1 - a_1 z, \ x_2 - a_2 z) = 0. \tag{41}$$

Положив

$$x_1 - a_1 z = \alpha, \quad x_2 - a_2 z = \beta, \tag{42}$$

видим, что прямые (42) лежат на поверхности (41), если

$$V(\alpha, \beta) = 0.$$

Значит, поверхность (41) есть геометрическое место прямых (42), которые параллельны между собою, т. е. поверхность (41) есть цилиндр, образующие которого параллельны прямым (42). Уравнение (39_1) определяет цилиндры с такими образующими.

Предложим себе теперь найти цилиндр, определяемый уравнением (39_1) и заключающий кривую

$$z = 0, \quad x_1 = \theta(x_2). \tag{43}$$

Так как коэффициент при $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ не равен нулю, задача имеет определенное и единственное решение.

Для решения задачи надо интегралы (42) заменить интегралами Коши, которые в данном случае, так как $z = 0$, имеют вид

$$x_1 - a_1 z = x_1^{(0)}, \ x_2 - a_2 z = x_2^{(0)}.$$

Главные решения уравнения (39_1) теперь

$$x_1 - a_1 z, \quad x_2 - a_2 z,$$

а искомая поверхность

$$x_1 - a_1 z = \theta(x_2 - a_2 z).$$

Поставим теперь обобщенную задачу Коши. Найдем решение уравнения (38), в котором

$$\text{при } x_1 = \theta(x_2) \qquad z = \vartheta(x_2).$$

Положив

$$x_1 - \theta(x_2) = \xi,$$

легко получаем, преобразуя уравнение (38), уравнение

$$[a_1 - a_2\theta'(x_2)]\frac{\partial z}{\partial \xi} + a_2\frac{\partial z}{\partial x_1} = 1. \tag{44}$$

Задача может не дать голоморфного решения, если

$$a_1 - a_2\theta'(x_2) = 0,$$

т. е.

$$\theta(x_2) = \frac{a_1}{a_2}x_2 + \gamma.$$

Для возможности в этом случае решения надо, чтобы функция $\vartheta(x_2)$ удовлетворяла уравнению

$$a_2\vartheta'(x_2) = 1,$$

откуда

$$\vartheta(x_2) = \frac{1}{a_2}x_2 + \beta.$$

Задача может быть возможна, когда

$$x_1 = \frac{a_1}{a_2}x_2 + \gamma, \quad z = \frac{1}{a_2}x_2 + \beta. \tag{43_1}$$

В этом случае линия (43_1) параллельна образующим цилиндра определенного уравнением (41), что можно было предвидеть. Геометрически ясно, что задача в этом случае имеет бесчисленное множество решений, что можно проверить и аналитически.

Считая, что ϑ и θ имеют выбранные значения, введем новое неизвестное, положив

$$z = \frac{1}{a_2}x_2 + \beta + \xi u.$$

Мы получим для нахождения u уравнение

$$\xi\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

откуда

$$u = A(\xi),$$

где $A(\xi)$ произвольная функция от ξ.

Следовательно, искомое решение

$$z = \frac{1}{a_2}x_2 + \beta + \left(x_1 - \frac{a_1}{a_2}x_2 - \gamma\right)A\left(x_1 - \frac{a_1}{a_2}x_2 - \gamma\right),$$

где $A(\xi)$ произвольная функция от ее аргумента.

2) Найти общее решение уравнения:

$$(x_1 - \alpha_1)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2 - \alpha_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + (x_n - \alpha_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = z - \alpha. \tag{39_2}$$

Отыскивая уравнение для нахождения z:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

находим

$$(x_1-\alpha_1)\frac{\partial V}{\partial x_1}+(x_2-\alpha_2)\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+(x_n-\alpha_n)\frac{\partial V}{\partial x_n}+$$
$$+(z-\alpha)\frac{\partial V}{\partial z}=0. \qquad (40_2)$$

Интегрируя систему

$$\frac{dx_1}{x_1-\alpha_1}=\frac{dx_2}{x_2-\alpha_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n-\alpha_n}=\frac{dz}{z-\alpha},$$

находим ее интегралы

$$\log(x_i-\alpha_i)-\log(z-\alpha)=\log C_i,$$

или

$$\frac{x_i-\alpha_i}{z-\alpha}=C_i, \qquad (i=1,\ 2,\ldots,n), \quad (45)$$

и решения уравнения (40_2)

$$\frac{x_1-\alpha_1}{z-\alpha},\ \frac{x_2-\alpha_2}{z-\alpha},\ldots,\frac{x_n-\alpha_n}{z-\alpha}.$$

Самое общее решение уравнения (39_2) находим, решая уравнение:

$$V\left(\frac{x_1-\alpha_1}{z-\alpha},\ \frac{x_2-\alpha_2}{z-\alpha},\ldots,\frac{x_n-\alpha_n}{z-\alpha}\right)=0.$$

Чтобы интерпретировать полученный результат, положим $n=2$. Тогда последнее уравнение принимает вид

$$V\left(\frac{x_1-\alpha_1}{z-\alpha},\quad \frac{x_2-\alpha_2}{z-\alpha}\right)=0$$

и определяет поверхность, на которой лежат прямые

$$\frac{x_1-\alpha_1}{z-\alpha}=m, \qquad \frac{x_2-\alpha_2}{z-\alpha}=n;$$

направляющие коэффициенты m и n этих прямых связаны зависимостью

$$V(m,\ n)=0.$$

Значит, поверхности, заданные уравнением (39_2) суть конусы, вершина которых в точке $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha)$.

Геометрически ясно, что всякая прямая, проходящая через эту вершину, есть характеристика.

Для решения задачи Коши, положив для удобства $\alpha_1=\alpha_2=\alpha=0$, ищем конус, определенный уравнением (39_2) и проходящий через кривую:

$$x_1=x_1^{(0)},\ z=\vartheta(x_2).$$

Для определенности задачи надо положить $x_1^{(0)}\neq 0$.

Переделываем интегралы (45) в интегралы Коши, положив

$$\frac{x_1}{z}=\frac{x_1^{(0)}}{z_0}, \qquad \frac{x_2}{z}=\frac{x_2^{(0)}}{z_0};$$

отыскиваем z_0 и $x_2^{(0)}$:

$$z_0 = \frac{z}{x_1} x_1^{(0)}, \qquad x_2^{(0)} = \frac{x_2}{x_1} x_1^{(0)}.$$

Главные решения уравнения, соответствующие $x_1 = x_1^{(0)}$:

$$\frac{z}{x_1} x_1^{(0)}, \qquad \frac{x_2}{x_1} x_1^{(0)}.$$

Искомая поверхность имеет уравнение:

$$\frac{z}{x_1} x_1^{(0)} = \vartheta \left(\frac{x_2}{x_1} x_1^{(0)} \right).$$

3) Из курса дифференциального исчисления известно, что если V однородная функция измерения k от аргументов x_1, $x_2 \ldots, x_n$, то

$$x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = kV.$$

Теперь мы можем убедиться и в обратном и показать, что последнему равенству удовлетворяет только однородная функция измерения k от ее аргументов.

Действительно, сводя интегрирование последнего уравнения к интегрированию однородного и отыскивая для него уравнение

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, V) = 0,$$

которому удовлетворяет V, ищем ω из уравнения

$$x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} + kV \frac{\partial \omega}{\partial V} = 0.$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию системы

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dV}{kV},$$

интегралы которой

$$\frac{x_2}{x_1} = C_2, \quad \frac{x_3}{x_1} = C_3 \ldots, \quad \frac{x_n}{x_1} = C_n, \quad \frac{V}{x_1^k} = C.$$

Отсюда ясно, что самое общее значение V мы найдем, решая уравнение

$$\Omega \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{V}{x_1^k} \right) = 0,$$

в котором Ω произвольная функция и которое для V дает выражение

$$V = x_1^k \vartheta \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1} \right).$$

Какова бы ни была функция ϑ, в правой части последнего равенства стоит однородная функция измерения k от аргументов x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

18. Особые случаи задачи Коши. Возвращаясь к сказанному в § 16, продолжаем исследование задачи Коши.

Ищется решение уравнения

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=X \tag{23}$$

при условии

$$\text{при } x_n=\theta(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}):\ z=\vartheta(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}). \tag{38}$$

Применяя указанный там прием, мы должны найти то решение уравнения

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial V}{\partial x_{n-1}}+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+X\frac{\partial V}{\partial z}=0, \tag{27}$$

в котором

$$\text{при } x_n=\theta(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}) \qquad V=z-\vartheta(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}) \tag{38$_1$}$$

и искать z из уравнения

$$V(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}, x_n, z)=0. \tag{24}$$

Выполнив введение нового независимого переменного ξ по формуле

$$x_n-\theta(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})=\xi,$$

мы преобразуем уравнения (23) и (27), применяя формулы § 10, соответственно в

$$\begin{aligned}&\underline{X}_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\underline{X}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\underline{X}_{n-1}\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}+\\&+\left(\underline{X}_n-\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\underline{X}_1-\ldots-\frac{\partial\theta}{\partial x_{n-1}}\underline{X}_{n-1}\right)\frac{\partial z}{\partial\xi}=\underline{X},\end{aligned} \tag{23$_1$}$$

$$\begin{aligned}&\underline{X}_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+\underline{X}_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+\underline{X}_{n-1}\frac{\partial V}{\partial x_{n-1}}+\\&+\left(\underline{X}_n-\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\underline{X}_1-\ldots-\frac{\partial\theta}{\partial x_{n-1}}\underline{X}_{n-1}\right)\frac{\partial V}{\partial\xi}+\underline{X}\frac{\partial V}{\partial z}=0,\end{aligned} \tag{27$_1$}$$

в которых

$$\underline{X}_i=X_i(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}, \theta+\xi, z).$$

Если коэффициенты при производных по ξ в этих уравнениях равны нулю при $\xi=0$, тожественно или после подстановки в них функции ϑ на место z, то уравнение (23), так же как и уравнение (27), могут иметь требуемые решения с производной по ξ остающейся ограниченной при $\xi=0$ только тогда, когда соблюдено условие

$$(X_1)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}+(X_2)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}+\ldots+(X_{n-1})\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{n-1}}-(X)\equiv 0, \tag{46}$$

в котором

$$(X_i)=X_i(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}, \theta, \vartheta).$$

Итак, если

$$(X_1)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+(X_2)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\ldots+(X_{n-1})\frac{\partial\theta}{\partial x_{n-1}}-(X_n)\equiv 0, \tag{47}$$

уравнение (23) может иметь только тогда решение, которое удовлетворяет условиям (38) и в котором производная

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_{x_n=0}=\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}$$

ограничена, когда соблюдено условие (46).

Заметим, что, если коэффициент при $\frac{\partial V}{\partial\xi}$ не обращается тожественно в нуль после подстановки $\xi=0$, ничто не мешает составить главные решения уравнения (27_1) и найти функцию, удовлетворяющую условиям (38_1). Значение z, найденное из уравнения (24), удовлетворит уравнению (23); но если θ не удовлетворяет условию (46), производная $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ не может оставаться ограниченной при $x_n=0$, а найденное решение голоморфным.

Пример. Найти решение уравнения

$$(y^2-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

при условии

$$\text{если } x=0, \text{ то } z=y^2.$$

Коэффициент при $\frac{\partial z}{\partial x}$ не обращается в нуль при $x=0$; он обращается в нуль при $z=y^2$. Условие (46), имеющее теперь вид

$$y\frac{\partial\theta}{\partial y}-\theta=2y^2-y^2=y^2\neq 0,$$

теперь не соблюдено; но нет препятствий к приложению метода § 16; только найденное решение не может быть голоморфным. Действительно, заменив данное уравнение уравнением

$$(y^2-z)\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

интегрируем систему характеристических линий

$$\frac{dx}{y^2-z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Интегрируя сначала уравнение, данное двумя последними отношениями, находим

$$\frac{z}{y}=A;$$

интегрируя затем уравнение

$$\frac{dx}{y-A}=dy,$$

получаем

$$x-\frac{1}{2}y^2+Ay=B,$$

что дает второй интеграл

$$x+z-\frac{1}{2}y^2=B.$$

Отыскивая интегралы Коши, составляем уравнения

$$\frac{z}{y}=\frac{z_0}{y_0},\qquad x+z-\frac{1}{2}y^2=z_0-\frac{1}{2}y_0{}^2=\frac{z}{y}y_0-\frac{1}{2}y_0{}^2.$$

Решая их, получаем

$$y_0=\frac{z}{y}+\sqrt{\frac{z^2}{y^2}+y^2-2z-2x},\qquad z_0=\frac{z}{y}y_0.$$

По смыслу задачи ищется функция V такая, что при $x=0$:

$$V=z-y^2.$$

Значит, искомое уравнение для нахождения z:

$$y_0\left(\frac{z}{y}-y_0\right)=0.$$

Решая уравнение

$$y_0=\frac{z}{y}+\sqrt{\frac{z^2}{y^2}+y^2-2z-2x}=0,$$

находим

$$z=\frac{1}{2}y^2-x.$$

Это z, удовлетворяя уравнению, не удовлетворяет поставленным начальным условиям и должно быть отброшено.

Решая уравнение

$$\frac{z}{y}-y_0=-\sqrt{\frac{z^2}{y^2}+y^2-2z-2x}=0,$$

находим

$$z=y^2+y\sqrt{2x}.$$

Это z удовлетворяет и уравнению и начальному условию. Но производная от него по x не ограничена, когда $x=0$.

Покажем теперь, что при одновременном соблюдении условий (46) и (47) уравнение (23) имеет бесчисленное множество решений.

При этих рассуждениях мы будем предполагать, что $\theta\equiv 0$, т. е. что в уравнении (23) предварительно выполнено преобразование (19); это предположение не уменьшает общности заключений.

Предполагая, что условие (46) соблюдено, введем новое неизвестное u, положив

$$z=\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})+x_n u. \tag{48}$$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}+x_n\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad (i=1, 2, \ldots, n-1),\quad \frac{\partial z}{\partial x_n}=x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}+u.$$

Преобразованное уравнение принимает вид

$$x_n\left(\overline{X}_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+\overline{X}_{n-1}\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}+\overline{X}_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)+$$
$$+\overline{X}_1\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}+\ldots+\overline{X_{n-1}}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}}=\overline{X}-u\overline{X}_n,$$

где

$$\overline{X}_i=\overline{X}_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \vartheta+x_n u).$$

Последнему уравнению мы дадим вид

$$\overline{X}_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+\overline{X}_{n-1}\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}+\overline{X}_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=$$
$$=\frac{\overline{X}-\overline{X}_1\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_1}-\ldots-\overline{X}_{n-1}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}}}{x_n}-\frac{\overline{X}_n}{x_n}u. \tag{49}$$

В силу условий (46) и (47), из которых последнее имеет теперь вид

$$(\overline{X}_n)=\overline{X}_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \vartheta)\equiv 0,$$

слагаемые в правой части равенства:

$$\frac{\overline{X}_n}{x_n},\quad \frac{\overline{X}-\overline{X}_1\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_1}-\ldots-\overline{X}_{n-1}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}}}{x_n}$$

голоморфные функции от x_n вблизи точки $x_n=0$.

Значит, можно найти бесконечное множество решений уравнения (49), если, конечно, один из коэффициентов

$$(\overline{X}_1),\ (\overline{X}_2), \ldots, (\overline{X}_{n-1}) \tag{50}$$

не равен нулю тожественно.

Подставляя в (48) различные значения u, найденные из уравнения (49), получаем различные решения уравнения (23), которые все удовлетворяют условиям (38).

В случае, когда все функции (50) равны нулю, вопрос о существовании требуемого голоморфного решения у уравнения (23) остается открытым.

Пример. Найти решение уравнения

$$(z-y)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z,$$

в котором

$$\text{при } x=0 \qquad z=y.$$

Условия (46) и (47) соблюдены; уравнение должно иметь бесчисленное множество решений. Ищем функцию V из уравнения

$$(z-y)\frac{\partial V}{\partial x}+y\,\frac{\partial V}{\partial y}+z\,\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Интегрируя систему

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

легко получаем сначала интеграл

$$\frac{z}{y}=A,$$

при помощи которого оставшееся уравнение преобразуется в

$$\frac{dx}{A-1}=dy$$

и дает

$$x-(A-1)\,y=B,$$

что приводит ко второму интегралу

$$x-z+y=B.$$

Отыскивая интегралы Коши, составляем уравнения

$$\frac{z}{y}=\frac{z_0}{y_0},\qquad x-z+y=-z_0+y_0=\frac{y_0(-z+y)}{y}$$

из которых получаем

$$y_0=\frac{(x-z+y)\,y}{y-z},\quad z_0=\frac{(x-z+y)\,z}{y-z}.$$

Для функции V имеем значение $x-z+y$, откуда заключаем, что

$$z=x+y,$$

найденное из уравнения:

$$x-z+y=0$$

удовлетворяет и данному уравнению и поставленным условиям; но из найденных главных рѐшений видно, что

$$z=y$$

также решение уравнения и решение, удовлетворяющее поставленным условиям. Значит, уже установлено, что теорема об единственности решения не имеет места.

Если мы положим

$$z=y+xu, \tag{51}$$

то мы легко получим для u уравнение

$$xu\,\frac{\partial u}{\partial x}+y\,\frac{\partial u}{\partial y}=u-u^2.$$

Интегрируя уравнение

$$xu\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+(u-u^2)\frac{\partial V}{\partial u}=0,$$

убеждаемся, что соответствующая ему система

$$\frac{dx}{xu}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u-u^2}$$

имеет интегралами

$$x(1-u)=A,\quad \frac{y(1-u)}{u}=B,$$

откуда ясно, что всякое u, найденное из уравнения

$$\varphi\left(x(1-u),\quad \frac{y(1-u)}{u}\right)=0,$$

в котором φ можно выбирать произвольно, будет после подстановки в (51) давать решение данного уравнения:

Например, положив

$$\varphi(\xi,\ \eta)=\xi-\eta^2,$$

находим

$$u=\frac{2y^2}{y^2+\sqrt{y^4+2y^2x}}$$

и соответственно этому следующее решение уравнения:

$$z=y+\frac{2yx}{y+\sqrt{y^2+2x}}.$$

Из доказанного вытекает, что многообразие (38), при соблюдении условий (46) и (47), есть характеристика, расположенная на некотором решении уравнения (23).

Нетрудно проверить непосредственно, что многообразия измерения $n-1$, названные характеристиками в § 16, удовлетворяют условиям (46) и (47).

Примем во внимание интегралы

$$\psi_1=C_1,\ \psi_2=C_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}=C_{n-1},\ \psi_n=C_n \tag{34}$$

системы (33).

По определению § 16 мы получаем характеристику, связав функции $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1},\ \psi_n$ двумя зависимостями

$$\omega_1(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1},\ \psi_n)=0,\ \omega_2(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1},\ \psi_n)=0, \tag{52}$$

если из этих двух зависимостей можно найти z и один из остальных аргументов, например x_n.

Положим, что можно из уравнений (52) найти x_n и z и что мы получим

$$x_n=\theta,\ z=\vartheta.$$

Обозначая через (ψ_k) результат замены в ψ_k аргументов x_n и z через θ и ϑ, имеем

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_1}{\partial(\psi_k)}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right)+\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_1}{\partial(\psi_k)}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}+ \\ +\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_1}{\partial(\psi_k)}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial z}\right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \equiv 0 \quad (i=1,2, \ldots, n-1)\end{gathered} \tag{53}$$

и такое же тождество для ω_2.

Так как ψ_k решение уравнения (27):

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} X_i \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}+X_n \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}+X \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \equiv 0.$$

Умножая тожество (53) на (X_i), давая i значения $1, 2, \ldots, n-1$ и складывая полученные тождества, получаем вследствие этого:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_1}{\partial(\psi_k)}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n-1}(X_i) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}-(X_n)\right)+ \\ +\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_1}{\partial(\psi_k)} \cdot\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial z}\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n-1}(X_i) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}-(X)\right) \equiv 0\end{gathered}$$

и такое же тожество для ω_2.

Так как

$$\left|\begin{array}{ll}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_1}{\partial(\psi_k)}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}\right), & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_1}{\partial(\psi_k)}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial z}\right) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_2}{\partial(\psi_k)}\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}\right), & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \omega_2}{\partial(\psi_k)} \cdot\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial z}\right)\end{array}\right| \neq 0,$$

иначе из уравнений (52) нельзя было бы найти x_n и z, полученные тожества приводят к условиям (46) и (47).

В заключение заметим, что решение задачи Коши приводит всегда к обыкновенным решениям. Если мы не имеем дела с особым случаем задачи Коши, мы можем заменить функцию ϑ через $\vartheta+a$ и получить семейство решений, зависящих от a, которому при $a=0$ принадлежит искомое. В особом же случае имеем множество решений, среди которых есть и зависящее от произвольного параметра.

19. Особенные решения линейного уравнения. Займемся теперь выяснением свойств особенных решений уравнения (23).

Положим, что

$$z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{54}$$

есть некоторое решение уравнения

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=X. \tag{23}$$

Теорема. *Если* (54) *особенное решение уравнения* (23), *то* 1) *или после подстановки вместо* z *функции* $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *все коэффициенты* $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ *обращаются в нуль,* 2) *или в каждой точке* $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \varphi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}))$ *один из коэффициентов* $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ *перестает быть голоморфным.*

Для доказательства предположим, что результат подстановки вместо z функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не обращает в нуль одного из коэффициентов $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$, скажем, X, и что есть точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \varphi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}))$, вблизи которой все коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ голоморфны. Докажем, что в этом случае решение (54) обыкновенное, т. е. может быть найдено решением уравнения

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0, \tag{55}$$

в котором $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ удовлетворяет уравнению

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+X\frac{\partial V}{\partial z}=0. \tag{27}$$

Положим, $z_0=\varphi(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Вблизи точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z_0)$ все коэффициенты уравнения (27) голоморфны и так как результат замены в X аргумента z через $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не равен нулю, можно найти, видоизменяя их, $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ так, чтобы его значение в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z_0)$ было отлично от нуля.

Если так, то можно найти главные решения уравнения (27), соответствующие $z=z_0$. Положим,

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \tag{56}$$

эти главные решения. Это функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ такие, что якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{57}$$

не равен тожественно нулю; он именно обращается в 1 при $z=z_0$, так как функции (56) при $z=z_0$ обращаются соответственно в $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Условимся обозначать знаками $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n, \overline{X}, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ результаты замены в функциях $X_1, X_2, \ldots, X_n, X, u_1, \ldots, u_n$

аргумента z его значением $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функции $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вычислим теперь якобиан

$$\frac{D(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Составляя его и пользуясь теоремой о дифференцировании сложной функции, очевидно имеем

$$\frac{D(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{\partial u_1}}{\partial x_1} + \dfrac{\overline{\partial u_1}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, & \dfrac{\overline{\partial u_1}}{\partial x_2} + \dfrac{\overline{\partial u_1}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\overline{\partial u_1}}{\partial x_n} + \dfrac{\overline{\partial u_1}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\overline{\partial u_n}}{\partial x_1} + \dfrac{\overline{\partial u_n}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, & \dfrac{\overline{\partial u_n}}{\partial x_2} + \dfrac{\overline{\partial u_n}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\overline{\partial u_n}}{\partial x_n} + \dfrac{\overline{\partial u_n}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (58)$$

Вычисляя последний определитель, представляем его в виде суммы определителей, в которых каждый столбец образован из первых или вторых слагаемых в элементах определителя (58). Заметив, что определители, в которых два столбца образованы из вторых слагаемых соответственных элементов, равны нулю, видим, что

$$\frac{D(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \overline{\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\overline{\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(z, x_2, \ldots, x_n)}} +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial x_2}\overline{\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, z, x_3, \ldots, x_n)}} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\overline{\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z)}}. \quad (58')$$

Мы можем без труда выразить коэффициенты последнего уравнения через коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$. Заметим для этого, что функции (56) образуют решение уравнения (27) и мы имеем n уравнений

$$\left.\begin{array}{l} X_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \ldots + X_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + X\dfrac{\partial u_1}{\partial z} \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + \ldots + X_n\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + X\dfrac{\partial u_n}{\partial z} \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (59)$$

связывающих $n+1$ аргумент

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, X. \quad (60)$$

Так как не все определители таблицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_n}{\partial z} \end{matrix} \right\|$$

равны тождественно нулю, — именно при нашем предположении определитель из первых n столбцов есть как раз определитель (57) — аргументы (60) пропорциональны определителям таблицы, взятым с соответственными знаками, и мы имеем

$$\frac{X_1}{\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n, z)}} = \frac{X_2}{(-1)\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_3, \ldots, x_n, z)}} = \ldots =$$

$$= \frac{X_n}{(-1)^{n-1}\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z)}} = \frac{X}{(-1)^n \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}.$$

Переводя в определителях, стоящих в знаменателях, столбец с производными от z на подобающее место, соответственно равенству (58′), получаем

$$\frac{X_1}{(-1)^{n-1}\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(z, x_2, \ldots, x_n)}} = \frac{X_2}{(-1)^{n-1}\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, z, \ldots, x_n)}} = \ldots =$$

$$= \frac{X_n}{(-1)^{n-1}\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, z)}} = \frac{X}{(-1)^n \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}.$$

Заменяя в последних равенствах z его значением (54) и обозначая через $(-1)^n M$ общее значение всех отношений в этих равенствах, получаем:

$$\overline{\frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}} = \frac{\overline{X}}{M}, \quad \overline{\frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(z, x_2, \ldots, x_n)}} = -\frac{\overline{X}_1}{M}, \ldots,$$

$$\overline{\frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)}} = -\frac{\overline{X}_n}{M};$$

вследствие чего равенство (58′) принимает вид

$$M\frac{D(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \overline{X} - \overline{X}_1\frac{\partial z}{\partial x_1} - \overline{X}_2\frac{\partial z}{\partial x_2} - \ldots - \overline{X}_n\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

В правой части мы получили результат подстановки вместо z его значения в уравнение (23), т. е. нуль, так как (54) есть решение этого уравнения. Значит,

$$M\frac{D(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv 0.$$

Но M не равно тожественно нулю, иначе были бы нули все коэффициенты $\overline{X}$, $\overline{X}_1, \ldots \overline{X}_n$, чего нет по первому предположению о z. Значит мы имеем тожественно

$$\frac{D(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv 0,$$

откуда вытекает, что функции $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots \overline{u}_n$ связаны некоторой зависимостью, и мы имеем тожество

$$\omega(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n) \equiv 0,$$

откуда ясно, что (54) удовлетворяет уравнению:

$$\omega(u_1; u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

т. е. что (54) есть обыкновенное решение уравнения (23).

Пример. Рассмотрим уравнение:

$$(x^2 + z^2 - 1)\frac{\partial z}{\partial x} + (xy + \sqrt{1-z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2-1})\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{61}$$

Коэффициенты уравнения (61) обращаются в нуль, когда

$$z = \sqrt{1-x^2}, \tag{62$_1$}$$

если знаки корней $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$, равных при выбранном z соответственно $\pm x$, $\pm y$, выбраны подобающим образом. Далее, второй коэффициент уравнения (61) перестает быть голоморфным вблизи всякой точки (x_0, y_0, z_0), в которой или $z_0 = 1$ или

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Но

$$z = 1 \tag{62$_2$}$$

очевидно, решение уравнения (61). Также уравнению удовлетворяет, как не трудно убедиться,

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}. \tag{62$_3$}$$

Значит, при применении метода § 13 решения (62_1), (62_2), (62_3) могут быть потеряны.

Ищем теперь обыкновенные решения уравнения (61). Они находятся решением уравнения

$$V(x, y, z) = 0, \tag{63}$$

в котором V удовлетворяет уравнению

$$(x^2+z^2-1)\frac{\partial V}{\partial x}+(xy+\sqrt{1-z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2-1})\frac{\partial V}{\partial y}=0.$$

Последнему уравнению отвечает система

$$\frac{dx}{x^2+z^2-1}=\frac{dy}{xy+\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}=\frac{dz}{0}.$$

Один из ее интегралов

$$z=z_0. \tag{64_1}$$

Остается интегрировать уравнение

$$\frac{dx}{x^2+z^2-1}=\frac{dy}{xy+\sqrt{1-z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}},$$

считая в нем, на основании (64_1), z постоянным.

Положив

$$=\sqrt{1-z^2}\,u,\qquad y=\sqrt{1-z^2}\,v,$$

мы преобразуем последнее уравнение в

$$\frac{du}{u^2-1}=\frac{dv}{uv+\sqrt{u^2+v^2-1}}.$$

Если положить теперь

$$v=\sqrt{u^2-1}\;t,\qquad dv=\frac{ut\,du+(u^2-1)dt}{\sqrt{u^2-1}},$$

будем иметь

$$du=\frac{ut\,du+(u^2-1)dt}{ut+\sqrt{t^2+1}}\quad\text{или}\quad\sqrt{t^2+1}\;du=(u^2-1)dt,$$

откуда

$$\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}}=A.$$

Возвращаясь к старым переменным, находим второй интеграл системы

$$\frac{y+\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}{x-\sqrt{1-z^2}}=B, \tag{64_2}$$

откуда вытекает, что самый общий вид уравнения, дающего обыкновенные решения z:

$$\Phi\left(z,\ \frac{y+\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}{x-\sqrt{1-z^2}}\right)=0. \tag{63'}$$

Отсюда ясно, что (62_2) обыкновенное решение; оно получается, если мы положим

$$\Phi(u,v)=u-1;$$

также (62_1) обыкновенное решение; оно получается, если мы положим

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{v}.$$

Но решение (62_3) особенное. Положив

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

имеем равенство

$$\Phi\left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 0,$$

которое при некотором Φ, если решение (62_3) не особенное, должно быть тожеством, чего быть не может, так как тогда было бы тожеством и равенство

$$\Phi\left(u, \frac{\sqrt{1 - x^2 - u^2}}{x + \sqrt{1 - u^2}}\right) = 0,$$

очевидно устанавливающее зависимость между x и u.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

20. Замечания общего характера. Условимся обозначать знаком p_i производную от z по x_i:

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

и рассмотрим систему из m однородных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} X_1(z) = X_1^{(1)} p_1 + X_1^{(2)} p_2 + \ldots + X_1^{(n)} p_n = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ X_m(z) = X_m^{(1)} p_1 + X_m^{(2)} p_2 + \ldots + X_m^{(n)} p_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

в которой коэффициенты $X_i^{(k)}$ зависят только от независимых переменых $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Про уравнения (1) мы будем всегда предполагать, что они линейно независимы относительно

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \qquad (2)$$

т. е. что из них можно найти m из этих аргументов.

Если мы имеем

$$m = n,$$

то из системы уравнений (1) можно найти все аргументы (2) и заменить ее системой

$$p_1 = 0, \; p_2 = 0, \ldots, p_n = 0.$$

Последняя система говорит, что единственное решение системы (1) в этом случае есть

$$z = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Обозначая левую часть уравнения (1) с нумером i знаком $X_i(z)$:

$$X_i(z) = X_i^{(1)} p_1 + X_i^{(2)} p_2 + \ldots + X_i^{(n)} p_n,$$

мы будем называть $X_i(z)$ линейным оператором. Знак $X_i(z)$ показывает, какие действия над z, состоящие из дифференцирований и умножений составленных производных, надо выполнить для нахождения этой левой части.

Операторы

$$X_1(z),\ X_2(z),\ \ldots,\ X_m(z)$$

мы будем для удобства иногда называть операторами системы (1). Система (1) получается приравнением нулю ее операторов.

21. Замечания о линейных операторах. Выберем два каких-нибудь уравнения системы (1), например уравнения, отвечающие операторам $X_i(z)$ и $X_j(z)$ и выполним операцию

$$X_i(X_j(z)) - X_j(X_i(z)). \tag{3}$$

Выражение (3) кажется зависящим от вторых производных от z. На самом деле это не так. Можно, именно, доказать:

Теорема. *Выражение* (3) *не зависит от производных второго порядка от z.*

Для доказательства достаточно установить, что коэффициенты при всех вторых производных в (3) равны нулю. Возьмем одну из производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_k\, \partial x_l}. \tag{4}$$

Эта производная может быть получена двояким образом: или дифференцированием по x_k производной p_l, или дифференцированием по x_l производной p_k. Ищем коэффициент при производной (4)

$$X_i(X_j(z)). \tag{5}$$

Производная $\frac{\partial}{\partial x_k} p_l$ получается после дифференцирования по x_k, каковое в операторе X_i снабжено умножением на коэффициент $X_i^{(k)}$, слагаемого $X_j^{(l)} p_l$ суммы $X_j(z)$; значит указанная производная в (5) входит с коэффициентом $X_i^{(k)} X_j^{(l)}$.

Производная $\frac{\partial}{\partial x_l} p_k$ получается после дифференцирования по x_l, каковое в операторе X_i снабжено умножением на коэффициент $X_i^{(l)}$ слагаемого $X_j^{(k)} p_k$ суммы $X_j(z)$; отсюда ясно, что указанная производная в (5) входит с коэффициентом $X_i^{(l)} X_j^{(k)}$.

Вследствие этого коэффициент при производной (4) в (5) равен

$$X_i^{(k)}X_j^{(l)}+X_i^{(l)}X_j^{(k)}.$$

Повторяя приведенные рассуждения для

$$X_j(X_i(z)), \tag{5'}$$

увидим, что коэффициент при производной (4) в (5′) равен

$$X_j^{(k)}X_i^{(l)}+X_j^{(l)}X_i^{(k)}.$$

Сравнение полученных двух коэффициентов говорит, что коэффициент при производной (4) в разности выражений (5) и (5′) равен нулю, что и требовалось доказать.

Так как от дифференцирования аргументов (2) в выражении (3) ничего не остается, то при составлении выражения (3) на эти аргументы можно смотреть как на постоянные. Из этого ясно, что коэффициент при некотором p_k в выражении (3) равен

$$X_i(X_j^{(k)})-X_j(X_i^{(k)})$$

и что, следовательно, мы имеем

$$X_i(X_j(z))-X_j(X_i(z))=\sum_{k=1}^{k=n}(X_i(X_j^{(k)})-X_j(X_i^{(k)}))p_k. \tag{3'}$$

22. Скобки Пуассона. Положим, что даны две функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, в которых на все аргументы:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$$

мы смотрим как на независимые переменные.

Выражение

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)$$

мы будем называть *скобкой Пуассона* и обозначать знаком (f, F):

$$(f, F)=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right). \tag{6}$$

Отметим следующие свойства скобок Пуассона.

1) Выражение (3) есть скобка Пуассона для $X_i(z)$ и $X_j(z)$, т. е.

$$(X_i, X_j)=X_i(X_j(z))-X_j(X_i(z)). \tag{7}$$

Действительно, смотря на все аргументы в

$$X_i(z)=X_i^{(1)}p_1+X_i^{(2)}p_2+\ldots+X_i^{(n)}p_n$$

как на независимые переменные, очевидно имеем

$$\frac{\partial X_i}{\partial p_k} = X_{i}^{(k)}.$$

Значит, не выписывая сокращающихся членов со вторыми производными, имеем:

$$X_i(X_j(z)) = \frac{\partial X_i}{\partial p_1}\frac{\partial X_j}{\partial x_1} + \frac{\partial X_i}{\partial p_2}\frac{\partial X_j}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial p_n}\frac{\partial X_j}{\partial x_n} + \ldots$$

и

$$X_j(X_i(z)) = \frac{\partial X_j}{\partial p_1}\frac{\partial X_i}{\partial x_1} + \frac{\partial X_j}{\partial p_2}\frac{\partial X_i}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_j}{\partial p_n}\frac{\partial X_i}{\partial x_n} + \ldots,$$

откуда непосредственно вытекает справедливость равенства (7), так как по определению скобки

$$(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial p_k}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial X_j}{\partial p_k}\right).$$

2) Переставляя функции f и F, мы очевидно меняем знак каждого слагаемого в (6), откуда вытекает, что

$$(f, F) = -(F, f). \tag{8}$$

3) Так как постоянный множитель выносится из-под знака производной, имеем

$$(f, CF) = C(f, F). \tag{9}$$

4) Так как

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right) + \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\right]$$

имеем

$$(f, F+\Phi) = (f, F) + (f, \Phi). \tag{10}$$

5) Так как

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial \lambda F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \lambda F}{\partial p_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x_k} + F\frac{\partial \lambda}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial p_k} + F\frac{\partial \lambda}{\partial p_k}\right)\right] =$$

$$= \lambda\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right) +$$

$$+F\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial\lambda}{\partial p_k}\right),$$

имеем

$$(f, \lambda F)=\lambda(f, F)+F(f, \lambda). \tag{11}$$

6) Так как

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)}{\partial x_k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\sum_{l=1}^{l=s}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_l}\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_k}\sum_{l=1}^{l=s}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_l}\frac{\partial\varphi_l}{\partial p_k}\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{l=s}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_l}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_l}{\partial p_k}$$

имеем

$$(f, \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s))=\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}(f, \varphi_1)+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}(f, \varphi_2)+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_s}(f, \varphi_s). \tag{12}$$

7) Чтобы иметь в одном месте все свойства скобок Пуассона, отметим еще следующее тожество:

$$(\varphi, (\psi, \omega))+(\psi, (\omega, \varphi))+(\omega, (\varphi, \psi))=0. \tag{13}$$

В этом тожестве каждое последующее слагаемое получается из предыдущего круговой перестановкой элементов

$$\varphi, \psi, \omega.$$

Тожество (13) называется тожеством Якоби.

Для его доказательства замечаем, что скобка

$$(\varphi, \psi)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)$$

однородная функция как от производных φ, так и от производных ψ.

Значит скобки, входящие в (13), однородные функции от вторых производных от функций φ, ψ, ω. Следовательно, доказав, что левая часть (13) не зависит от вторых производных от функций φ, ψ, ω, мы этим самым докажем, что она тожественно равна нулю. Покажем, что она не зависит от вторых производных функции φ. От этих производных могут зависеть только два последние слагаемые в левой части (13).

Положим

$$(\psi, f)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)=X_1(f)$$

$$(\omega, f)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)=X_2(f)$$

тогда

$$(\psi,(\omega,\varphi))=X_1(X_2(\varphi)),\ (\omega,(\varphi,\psi))=-(\omega,(\psi,\varphi))=-X_2(X_1(\varphi))$$

и

$$(\psi,(\omega,\varphi))+(\omega,(\varphi,\psi))=X_1(X_2(\varphi))-X_2(X_1(\varphi));$$

но выражение, получившееся в правой части последнего равенства, как мы установили в § 21, не зависит от вторых производных от φ. Итак наше утверждение доказано.

23. Замкнутые системы. Возвращаемся к системе (1). Составим все возможные скобки Пуассона, выбирая по две левые части уравнений (1):

$$(X_i, X_j)=X_i(X_j(z))-X_j(X_i(z)).$$

Каждая такая скобка по сказанному в § 21 равна линейной функции

$$\sum_{k=1}^{k=n}(X_i(X_j^{(k)})-X_j(X_i^{(k)}))p \tag{14}$$

от аргументов (2).

Если z решение системы (1), то имеем тожественно

$$X_i(z)\equiv 0,\quad X_j(z)\equiv 0$$

и, значит,

$$(X_i,X_j)=\sum_{k=1}^{k=n}(X_i(X_j^{(k)})-X_j(X_i^{(k)}))p_k\equiv 0.$$

Из этого ясно, что в дальнейшем следует различать два случая.

Случай (A), в котором каждое выражение (14) есть линейная функция от функций:

$$X_1(z),\ X_2(z),\ldots,X_m(z),$$

т. е. случай, когда тожественно

$$(X_i,X_j)\equiv A_1^{(i,j)}X_1+A_2^{(i,j)}X_2+\ldots+A_m^{(i,j)}X_m;$$

в этом случае каждое равенство

$$(X_i,X_j)=0$$

справедливо само собою, если справедливы равенства

$$X_1=0,\ldots,X_m=0.$$

В случае (A) система называется замкнутой. Итак, система замкнутая, если скобка Пуассона для любых двух ее операторов есть линейная функция от ее операторов.

В случае (B), когда условия случая (A) не соблюдены, система называется незамкнутой.

Некоторые равенства

$$(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{k=n} [X_i(X_j^{(k)}) - X_j(X_i^{(k)})] p_k = 0, \tag{15}$$

не представляя собою алгебраических следствий системы (1), устанавливают новые зависимости между аргументами (2), которые, однако, должны удовлетворяться всякой функцией z, удовлетворяющей уравнениям (1). Следовательно, присоединив к системе (1) те из равенств (15), которые алгебраически независимы от уравнений системы (1), и откинув в новой системе те уравнения, которые линейно выражаются через другие, мы получим новую систему уравнений, которые состоят из уравнений (1) и некоторых других уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} X_{m+1}(z) = X_{m+1}^{(1)} p_1 + \ldots + X_{m+1}^{(n)} p_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{m+m_1}(z) = X_{m+m_1}^{(1)} p_1 + \ldots + X_{m+m_1}^{(n)} p_n = 0, \end{array}\right\} \tag{1_1}$$

число которых по крайней мере не меньше одного; при этом от замены системы (1) системой из уравнений (1) и (1_1) не потеряна ни одна из функций z, удовлетворяющих системе (1).

С новой системой из уравнений (1) и (1_1) мы можем возобновить наши рассуждения. Она может оказаться замкнутой и, значит, приготовленной к интегрированию, но может оказаться не замкнутой. В последнем случае к ней можно прибавить несколько, по крайней мере одно из уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} X_{m+m_1+1}(z) = X_{m+m_1+1}^{(1)} p_1 + \ldots + X_{m+m_1+1}^{(n)} p_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{m+m_1+m_2}(z) = X_{m+m_1+m_2}^{(1)} p_1 + \ldots + X_{m+m_1+m_2}^{(n)} p_n = 0 \end{array}\right\} \tag{1_2}$$

и заменить систему из уравнений (1) и (1_1) системой из уравнений (1), (1_1), (1_2), не потеряв ни одного решения системы (1).

Продолжая так далее и замечая, что после каждой операции число уравнений системы увеличивается по крайней мере на единицу, мы, после ограниченного числа действий, или получим замкнутую систему, что заставит нас прекратить дальнейшие преобразования, или получим систему из n уравнений.

Всякая система из n уравнений, очевидно, замкнутая; если $m = n$ и уравнения алгебраически независимы, из уравнений

$$\begin{array}{l} X_1(z) = X_1^{(1)} p_1 + \ldots + X_1^{(n)} p_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n(z) = X_n^{(1)} p_1 + \ldots + X_n^{(n)} p_n, \end{array}$$

можно линейно выразить $p_1, \ldots, p_n$ через $X_1(z), \ldots, X_n(z)$ и значит, всякую скобку Пуассона, которая есть линейная и однородная функция от $p_1, p_2, \ldots, p_n$, можно линейно выразить через $X_1(z)$, $X_2(z), \ldots, X_n(z)$.

Собирая все сказанное, заключаем, что интегрирование всякой незамкнутой системы (1) может быть заменено интегрированием замкнутой системы.

24. Якобиева система. Если система (1) замкнутая, то всякая скобка Пуассона (X_i, X_j) есть линейная функция от $X_1(z), \ldots, X_m(z)$, т. е.

$$(X_i, X_j) \equiv A_1^{(i,j)} X_1(z) + A_2^{(i,j)} X_2(z) + \ldots + A_m^{(i,j)} X_m(z),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, m).$$

Если в последних формулах все коэффициенты $A_s^{(i,j)}$ равны нулю, то все скобки (X_i, X_j) тождественно равны нулю. В этом последнем случае система (1) называется якобиевой. Итак, *якобиевой системой называется система, когда все скобки Пуассона, составленные при помощи ее операторов, равны нулю тождественно.*

25. Две теоремы о замкнутых системах. Докажем две теоремы о замкнутых системах:

Теорема 1. *Если система* (1) *замкнутая, соответственно якобиева, и если мы выполним какое-нибудь преобразование переменных, вводя вместо* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *переменные* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *по формулам*

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right\} \qquad (16)$$

то мы получим замкнутую, соответственно якобиеву, систему.

Если q_i производная от z по y_i, то преобразование (16) меняет оператор $X_i(z)$ в линейную функцию от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Обозначая ее через $Y_i(z)$, имеем, после выполнения преобразования (16),

$$X_i(z) = Y_i(z), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \quad (17)$$

Положим, что система (1) замкнутая: тогда

$$(X_i, X_j) = X_i(X_j(z)) - X_j(X_i(z)) \equiv$$
$$\equiv A_1^{(i,j)} X_1(z) + A_2^{(i,j)} X_2(z) + \ldots + A_m^{(i,j)} X_m. \qquad (2)$$

Выполняя в последнем тожестве подстановку (16) и пользуясь (17), получим:

$$Y_i(Y_j(z)) - Y_j(Y_i(z)) = (Y_i, Y_j) \equiv$$
$$\equiv \overline{A_1^{(i,j)}} Y_1(z) + \overline{A_2^{(i,j)}} Y_2(z) + \ldots + \overline{A_m^{(i,j)}} Y_m(z),$$

откуда ясно, что высказанная теорема справедлива.

В последнем равенстве знаком $\overline{f}$ мы обозначаем функцию от аргументов $y_1, \ldots, y_n$, полученную из функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ путем исключения аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи формул (16).

Если, в частном случае, все скобки (X_i, X_j) были равны нулю тождественно, то были нули все коэффициенты $A_s^{(\overline{i,j})}$ и, значит, все скобки (Y_i, Y_j) равны нулю тождественно, что подтверждает утверждение теоремы о случае якобиевой системы.

Отметим, на всякий случай, что уравнения системы, полученной преобразованием переменных, очевидно линейно независимы; предположение противного, после обратного преобразования переменных, привело бы к заключению, что и уравнения данной системы связаны линейной зависимостью.

Найдем еще выражение $Y_i(z)$, это даст нам формулу, которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k},$$

то

$$X_i(z) = \sum_{k=1}^{k=n} X_i^{(k)}\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\sum_{k=1}^{k=n} X_i^{(k)}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} +$$

$$+\frac{\partial z}{\partial y_2}\sum_{k=1}^{k=n} X_i^{(k)}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y_n}\sum_{k=1}^{k=n} X_i^{(k)}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k} =$$

$$= q_1X_i(\varphi_1) + q_2X_i(\varphi_2) + \ldots + q_nX_i(\varphi_n).$$

Значит, мы имеем

$$Y_i(z) = \overline{X_i(\varphi_1)}q_1 + \overline{X_i(\varphi_2)}q_2 + \ldots + \overline{X_i(\varphi_n)}q_n. \qquad (17_1)$$

Положим

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = A_1^{(1)}X_1 + A_1^{(2)}X_2 + \ldots + A_1^{(m)}X_m \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_m = A_m^{(1)}X_1 + A_m^{(2)}X_2 + \ldots + A_m^{(m)}X_m \end{array}\right\} \qquad (18)$$

считая, что определитель

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, \ldots, A_1^{(m)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_m^{(1)}, & A_m^{(2)}, \ldots, A_m^{(m)} \end{vmatrix}$$

не равен тождественно нулю.

В этом случае справедливость равенств

$$P_1 = 0, \ldots, P_m = 0 \qquad (19)$$

влечет за собой справедливость равенств

$$X_1 = 0, \ldots, X_m = 0;$$

обратное очевидно.

Системы (19) и (1) мы назовем *эквивалентными*.

Теорема 2. *Если система* (1) *замкнутая, то эквивалентная ей система* (19) *тоже замкнутая.*

Преобразование (18) можно выполнить постепенно при помощи m шагов, вводя при каждом шаге одно из уравнений (19) и сохраняя $m-1$ уравнений, введенных в предшествующем шаге.

Для выполнения первого шага можно положить, если, например, коэффициент $A_1^{(1)}$ не равен нулю (а один из коэффициентов $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}, \ldots, A_1^{(m)}$ наверное не нуль):

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = A_1^{(1)} X_1 + A_1^{(2)} X_2 + \ldots + A_1^{(m)} X_m \\ P_2 = X_2, \ldots, P_m = X_m. \end{array}\right\} \qquad (18')$$

Выразив X_1 через P_1 и $X_2, \ldots, X_m$, мы найдем из (18) выражения $P_2, \ldots, P_m$ через P_1, $X_2, \ldots, X_m$ и заметив, что P_3 и P_1 не связаны линейной зависимостью, сможем при втором шаге заменить оператор X_2 оператором P_2, сохраняя операторы P_1, $X_3, \ldots, X_m$ и так поступать далее.

Для доказательства теоремы, следовательно, достаточно доказать теорему для преобразования (18').

Так как при этом преобразовании вводится только оператор P_1, то достаточно рассмотреть скобки

$$(P_1, X_2),\ (P_1, X_3), \ldots, (P_1, X_m).$$

Имеем

$$(P_1, X_i) = \sum_{k=1}^{k=m} (A_1^{(k)} X_k,\ X_i) = \sum_{k=1}^{k=m} A_1^{(k)} (X_k,\ X_i) + \sum_{k=1}^{k=m} X_k (A_1^{(k)}, X_i). \quad (20)$$

Но вследствие замкнутости системы (1) каждая скобка (X_k, X_i) равна линейной функции от операторов $X_1, X_2, \ldots, X_n$; значит правая часть последнего равенства — линейная функция от этих операторов и так как каждый оператор X_1, $X_2, \ldots, X_m$ на основании (18') равен линейной функции операторов $P_1, P_2, \ldots, P_m$, то скобка (P_1, X_i) выражается также линейно через эти операторы, что и требуется доказать.

26. Нормальная система уравнений. Вследствие их алгебраической независимости относительно аргументов (2), из уравнений (1) можно найти некоторые m из этих аргументов: положим, что можно найти

$$p_1, p_2, \ldots, p_m \qquad (21)$$

и преобразовать систему (1) в систему вида

$$\left.\begin{array}{l} p_1 + a_1^{(m+1)} p_{m+1} + a_1^{(m+2)} p_{m+2} + \ldots + a_1^{(n)} p_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m + a_m^{(m+1)} p_{m+1} + a_m^{(m+2)} p_{m+2} + \ldots + a_m^{(n)} p_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Система (22) называется *нормальной*. Она, очевидно, эквивалентна системе (1): каждое ее уравнение получается из уравнений системы (1) умножением их на подобающие миноры определителя

$$\begin{vmatrix} X_1^{(1)}, & X_1^{(2)}, & \dots, & X_m^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_m^{(1)}, & X_m^{(2)}, & \dots, & X_m^{(m)} \end{vmatrix},$$

сложением произведений и делением на этот определитель. Следовательно, по второй теореме § 25, если система замкнута, то соответствующая ей нормальная система (22) тоже замкнутая.

Теорема. *Всякая замкнутая нормальная система есть якобиева система.*

Дав уравнениям нормальной системы (22) вид

$$\left.\begin{array}{l} P_1(z) = p_1 + a_1^{(m+1)} p_{m+1} + \ldots + a_1^{(n)} p_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_m(z) = p_m + a_m^{(m+1)} p_{m+1} + \ldots + a_m^{(n)} p_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (22)$$

мы можем писать, так как система (22) замкнутая, что

$$(P_i, P_j) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial x_k} - \frac{\partial P_i}{\partial x_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \right) \equiv B_1^{(i,j)} P_1 + \\ + B_2^{(i,j)} P_2 + \ldots + B_m^{(i,j)} P_m. \qquad (23)$$

Но скобки (P_i, P_j) не зависят от аргументов

$$p_1, p_2, \ldots, p_m. \qquad (21)$$

Действительно, производные

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial P_j}{\partial p_k}$$

от этих аргументов не зависят, так как $P_1, \ldots, P_m$ линейные функции от аргументов (21); производные же

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial x_k}$$

от аргументов (21) не зависят потому, что в уравнениях (22) коэффициенты при этих аргументах равны 1 и значит производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от этих коэффициентов нули.

Следовательно, правая часть равенства (23) не зависит от аргументов (21). Но в ней от p_1 зависит только P_1; значит $B_1^{(i,j)}$ равен нулю; далее от p_2 зависит только P_2; значит $B_2^{(i,j)}$ равен нулю. Продолжая так далее перебирать слагаемые правой части равенства (23), мы убедимся, что все коэффициенты в ней нули, и что скобка

$$(P_i, P_j)$$

равна нулю тожественно, что и требовалось доказать.

27. Об икобиевых системах. Основываясь на теореме § 26, можно утверждать, что справедлива теорема:

Теорема. *Всякая замкнутая система может быть переделана в якобиеву.*

Такое преобразование может быть сделано многими различными способами; чтобы доказать теорему, достаточно указать один из них. Такой способ преобразования мы имеем в преобразовании в нормальную систему, которая по теореме § 26 якобиева и в которую может быть преобразована всякая система.

Теорема. *Если система* (1) *якобиева и*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

есть одно из решений уравнения

$$X_1(z) = X_1^{(1)} p_1 + X_1^{(2)} p_2 + \ldots + X_1^{(n)} p_n = 0,$$

принадлежащего системе (1), *то каждая из функций*

$$X_2(\varphi), X_3(\varphi), \ldots, X_m(\varphi)$$

решение этого уравнения.

Действительно, так как система якобиева, мы имеем тожественно:

$$(X_1, X_i) \equiv X_1(X_i(z)) - X_i(X_1(z)) \equiv 0.$$

Подставляя φ на место z в последнее тожество и замечая, что по заданию

$$X_1(\varphi) \equiv 0,$$

заключаем:

$$X_1(X_i(\varphi)) \equiv 0, \quad i = 2, \ldots, m,$$

что и требовалось доказать.

28. Метода Якоби. Метода интегрирования систем однородных уравнений, к изложению которой мы переходим, требует, чтобы интегрируемая система была якобиевой.

Если данная система

$$\left.\begin{array}{l} X_1(z) = X_1^{(1)} p_1 + X_1^{(2)} p_2 + \ldots + X_1^{(n)} p_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m(z) = X_m^{(1)} p_1 + X_m^{(2)} p_2 + \ldots + X_m^{(n)} p_n = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

будучи замкнутой, не якобиева, то ранее приложения методы надо заменить ее ей эквивалентной нормальной системой, скажем составить систему (22). Предположим, что система (1) якобиева, т. е. что справедливы тожества

$$(X_i(z), X_j(z)) \equiv 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, m) \quad (24)$$

Выберем какое-нибудь уравнение системы (1), например первое:

$$X_1(z) = X_1^{(1)} p_1 + X_1^{(2)} p_2 + \ldots + X_1^{(n)} p_n = 0$$

и найдем систему его независимых решений, число которых равно $n-1$. Для этого надо найти интегралы системы

$$\frac{dx_1}{X_1^{(1)}}=\frac{dx_2}{X_1^{(2)}}=\ldots=\frac{dx_n}{X_1^{(n)}};$$

левые части этих интегралов будут требуемыми решениями. Положим,

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (25)$$

эти решения.

Так как функции (25) решения взятого уравнения, то

$$X_1(\varphi_k)\equiv 0,\ (k=2, 3, \ldots, n). \qquad (26)$$

Положим, что коэффициент $X_1^{(1)}$ не равен нулю; отдадим на основании этого предпочтение аргументу x_1 и введем новые переменные независимые, сохраняя x_1 и взяв за остальные функции (25). Обозначая эти переменные буквами $y_2, y_3, \ldots, y_n$, имеем

$$y_2=\varphi_2,\ y_3=\varphi_3, \ldots, y_n=\varphi_n.$$

Из последних уравнений можно найти $x_2, x_3, \ldots, x_n$, так как по доказанному в § 7 функции (25) алгебраически независимы относительно этих аргументов.

Если мы условимся обозначать через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ производные от z по новым переменным независимым, то после введения новых переменных первое уравнение системы (1) примет по формуле (17_1) вид

$$\overline{X_1(x_1)}\, q_1+\overline{X_1(\varphi_2)}\, q_2+\ldots+\overline{X_1(\varphi_n)}\, q_n=0,$$

где чертой наверху, как и прежде, мы обозначаем результат введения в функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументов $x_1, y_2, \ldots, y_n$. Вследствие (26) последнее уравнение имеет очевидно вид

$$\overline{X_1^{(1)}}\, q_1=0.$$

Уравнение с нумером (i) системы (1) преобразуется в уравнение

$$\overline{X_i(x_1)}\, q_1+\overline{X_i(\varphi_2)}\, q_2+\ldots+\overline{X_i(\varphi_n)}\, q_n=0$$

и система (1), так как очевидно

$$X_i(x_1)=X_i^{(1)}$$

преобразуется в систему

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{X_1}=\overline{X_1^{(1)}}\, q_1=0\\
\overline{X_2}=\overline{X_2^{(1)}}\, q_1+\overline{X_2(\varphi_2)}\, q_2+\ldots+\overline{X_2(\varphi_n)}\, q_n=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overline{X_m}=\overline{X_m^{(1)}}\, q_1+\overline{X_m(\varphi_2)}\, q_2+\ldots+\overline{X_m(\varphi_n)}\, q_n=0.
\end{array}\right\} \qquad (27)$$

Заменяем систему (27) ей эквивалентной

$$\left.\begin{array}{c} q_1 = 0 \\ Y_2(z) = Y_2^{(2)} q_2 + Y_2^{(3)} q_3 + \ldots + Y_2^{(n)} q_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_m(z) = Y_m^{(2)} q_2 + Y_m^{(3)} q_3 + \ldots + Y_m^{(n)} q_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (1_2)$$

положив для удобства

$$Y_i^{(k)} = \overline{X_i(\varphi_k)}.$$

Так как система (1) была якобиевой, система (27) также якобиева и, значит, замкнутая. Значит, эквивалентная ей система (1_2) также замкнутая. Мы докажем, однако, что система (1_2) якобиева и что, сверх этого, коэффициенты ее от x_1 не зависят.

Отметим, что когда система (1) нормальная, системы (27) и (1_2) не отличны одна от другой; в случае нормальной системы, именно

$$X_1^{(1)} = 1, \quad X_i^{(1)} = 0, \quad i > 1.$$

Чтобы доказать эти утверждения, достаточно вспомнить, что по первой теореме § 25 система (27), как получившаяся из якобиевой системы преобразованием переменных независимых, должна быть якобиевой.

Поэтому, положив для удобства

$$\overline{X_k^{(1)}} = Y_k^{(1)}$$

и обозначая через $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_m$ левые части уравнений (27), мы прежде всего, имеем

$$(\overline{X}_1, \overline{X}_i) = \overline{X}_1^{(1)} \frac{\partial \overline{X}_i}{\partial x_1} - q_1 \sum_{k=1}^{k=n} Y_i^{(k)} \frac{\partial \overline{X_1^{(i)}}}{\partial y_k} \equiv 0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициенты при $q_2, q_3, \ldots, q_n$, заключаем, что

$$\frac{\partial Y_i^{(2)}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial Y_i^{(3)}}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial Y_i^{(n)}}{\partial x_1} = 0,$$

т. е. что наше второе утверждение справедливо.

Применяя далее формулу (3′) § 21, имеем

$$(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = \sum_{k=1}^{k=n} [\overline{X}_i(Y_j^{(k)}) - \overline{X}_j(Y_i^{(k)})] q_k \equiv 0,$$

откуда

$$\overline{X}_i(Y_j^{(k)}) - \overline{X}_j(Y_i^{(k)}) \equiv 0 = \overline{X_i^{(1)}} \frac{\partial Y_j^{(k)}}{\partial x_1} - \overline{X}_j^{(1)} \frac{\partial Y_i^{(k)}}{\partial x_1} + Y_i(Y_j^{(k)}) - Y_j(Y_i^{(k)}) \equiv$$

$$\equiv Y_i(Y_j^{(k)}) - Y_j(Y_i^{(k)}) \equiv 0.$$

Следовательно,

$$(Y_i, Y_j) = \sum_{k=2}^{k=n} [Y_i(Y_j^{(k)}) - Y_j(Y_i^{(k)})] q_k \equiv 0, i=2,3,\ldots,n, j=2,3,\ldots,n$$

что и требовалось доказать.

Из сказанного вытекает, что последние $m-1$ уравнений системы (1_2) образуют самостоятельную замкнутую систему от $m-1$ независимой переменной и интегрирование системы с n переменными независимыми нами фактически сведено к интегрированию системы с $n-1$ переменной независимой.

Отдав предпочтение первому уравнению этой последней системы

$$Y_2 = Y_2^{(2)} q_2 + Y_2^{(3)} q_3 + \ldots + Y_2^{(n)} q_n = 0, \tag{28}$$

возобновляем на системе (1_2) операции, выполненные над системой (1).

Если

$$\psi_3(y_2, y_3, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

решения уравнения (28) и если в уравнении (28) коэффициент $Y_2^{(2)}$ не равен нулю, берем в системе (1_2) за новые переменные независимые

$$x_1, y_2, t_3 = \psi_3(y_2, y_3, \ldots, y_n), \ldots, t_n = \psi_n(y_2, y_3, \ldots, y_n).$$

Если $r_1, r_2, \ldots, r_n$ производные по этим переменным независимым, то система (1_2) преобразуется в систему, эквивалентную системе

$$\left.\begin{aligned} &R_1(z) = r_1 = 0 \\ &R_2(z) = r_2 = 0 \\ &R_3(z) = R_3^{(3)} r_3 + R_3^{(4)} r_4 + \ldots + R_3^{(n)} r_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &R_m(z) = R_m^{(3)} r_3 + R_m^{(4)} r_4 + \ldots + R_m^{(n)} r_n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1_3}$$

в которой

$$R_k^{(s)} = \overline{Y_k(\psi_s)}.$$

Последняя система якобиева и в ней коэффициенты $R_k^{(s)}$ не зависят от x_1 и y_2.

Возобновляя рассуждения над последними $m-2$ уравнениями системы (1_3) и продолжая так далее, мы после $m-1$ операций получим систему

$$\left.\begin{aligned} &S_1(z) = s_1 = 0 \\ &S_2(z) = s_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &S_{m-1}(z) = s_{m-1} = 0 \\ &S_m(z) = S_m^{(m)} s_m + S_m^{(m+1)} s_{m+1} + \ldots + S_m^{(n)} s_n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1_m}$$

в которой коэффициенты $S_m^{(k)}$ не зависят от $x_1, y_2, t_3, \ldots, u_{m-1}$; переменные независимые $v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ последнего уравнения системы (1_m) удовлетворяют уравнению с нумером $m-1$ системы (1_{m-1}).

Если

$$\omega_{m+1}(v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n), \ldots, \omega_n(v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n) \tag{29}$$

алгебраически независимые решения последнего уравнения системы (1_m), то они, как не зависящие от $x_1, y_2, t_3, \ldots, u_{m-1}$, удовлетворяют всем уравнениям системы (1_m).

Выражая в них $v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ последовательно через независимые переменные систем (1_{m-1}), (1_{m-2}), (1_2) и (1), мы преобразуем функции (29) в функции

$$\vartheta_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \vartheta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{29'}$$

образующие решение системы (1). Эти функции алгебраически независимы; действительно, если справедливо тожество

$$\Omega(\vartheta_{m+1}, \vartheta_{m+2}, \ldots, \vartheta_n) \equiv 0,$$

то возвращаясь к переменным независимым $x_1, y_2, t_3, \ldots, u_{m-1}$, $v_m, \ldots, v_n$ мы заключим, что справедливо и тожество

$$\Omega(\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \ldots, \omega_n) \equiv 0,$$

чего быть не может вследствие алгебраической независимости функций (29). Из сказанного еще вытекает, что нами найдены все алгебраически независимые решения системы (1); если бы существовало еще одно решение этой системы

$$\vartheta_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

то оно, после введения переменных независимых системы (1_m) обратилось бы в некоторое решение системы (1_m):

$$\omega_{n+1}(v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n),$$

и, значит, как решение последнего уравнения этой системы, выражалось бы алгебраически через функции (29); отсюда ясно, что ϑ_{n+1} выражается алгебраически через (29').

Итак, замкнутая система из m уравнений с n переменными независимыми имеет $n-m$ алгебраически независимых решений.

Отметим, что если Ω произвольная функция от ее аргументов, то

$$\Omega(\vartheta_{m+1}, \vartheta_{m+2}, \ldots, \vartheta_n)$$

решение системы (1); последнее ясно из того, что

$$\Omega(\omega_{m+1}, _{m+2}, \ldots, \omega_n)$$

есть решение системы (1_m). Обратное также справедливо: так как всякое решение системы (1_m) некоторая функция от $\omega_{m+1}, \ldots, \omega_n$, всякое решение системы (1) некоторая функция от $\vartheta_{m+1}, \ldots, \vartheta_n$.

Заметим в заключение, что если из системы (1) могут быть найдены производные $p_1, p_2, \ldots p_m$, т. е. если определитель

$$\begin{vmatrix} X_1^{(1)}\, X_1^{(2)}, \ldots, X_1^{(m)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ X_m^{(1)}\, X_m^{(2)}, \ldots, X_m^{(m)} \end{vmatrix} \tag{30}$$

не равен тождественно нулю, то функции (29′) алгебраически независимы относительно аргументов $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Если бы этого не было, то, исключая эти аргументы, можно было бы установить равенство

$$\Omega(\vartheta_{m+1}, \vartheta_{m+2}, \ldots, \vartheta_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

в котором функция φ не постоянная, так как иначе функции (29′) не были бы алгебраически независимы. Но, по сказанному, φ решение системы (1); отсюда вытекает, что

$$X_1^{(1)} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + X_1^{(2)} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + X_1^{(m)} \frac{\partial\varphi}{\partial x_m} = 0$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$X_m^{(1)} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + X_m^{(2)} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + X_m^{(m)} \frac{\partial\varphi}{\partial x_m} = 0$$

и вследствие неравенства нули определителя (30):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_m} = 0,$$

т. е. φ, противно условиям, постоянна.

29. **Примеры.** 1) Найти самое общее решение системы

$$X_1(z) = p_1 + x_1 x_3 p_4 = 0,$$

$$X_2(z) = p_2 + x_2 x_3 p_4 = 0, \quad X_3(z) = p_3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} p_4 = 0.$$

Исследуем прежде всего, замкнута ли система. Составляя скобки Пуассона, находим

$$(X_1, X_2) = 1 \cdot 0 + x_1 x_3 \cdot 0 - (1 \cdot 0 + x_2\, x_3 \cdot 0) \equiv 0$$

$$(X_1, X_3) = 1 \cdot x_1\, p_4 + x_1\, x_3 \cdot 0 - \left(1 \cdot x_1\, p_4 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot 0\right) \equiv 0$$

$$(X_2, X_3) = 1 \cdot x_2\, p_4 + x_2\, x_3 \cdot 0 - \left(1 \cdot x_2\, p_4 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot 0\right) \equiv 0;$$

система замкнутая; так как она нормальна, то она якобиева.

Интегрируя первое уравнение системы

$$p_1 + x_1\, x_3\, p_4 = 0,$$

составляем систему

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{0} = \frac{dx_4}{x_1 x_3};$$

ее интегралы

$$x_2 = C_2, \quad x_3 = C_3;$$

последний интеграл находим интегрированием уравнения

$$dx_4 - x_1 x_3 dx_1 = 0,$$

в котором x_3 постоянно, и получаем

$$x_4 - \frac{1}{2} x_1^2 x_3 = C_4.$$

Итак решения первого уравнения системы

$$x_2, x_3, y_4 = x_4 - \frac{1}{2} x_1^2 x_3.$$

Берем за переменные x_1, x_2, x_3, y_4. Так как

$$X_2\left(x_4 - \frac{1}{2} x_1^2 x_3\right) = x_2 x_3,$$

$$X_3\left(x_4 - \frac{1}{2} x_1^2 x_3\right) = -\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{x_2^2}{2},$$

то новая система имеет вид

$$Y_1(z) = q_1 = 0$$
$$Y_2(z) = q_2 + x_2 x_3 q_4 = 0$$
$$Y_3(z) = q_3 + \frac{x_2^2}{2} q_4 = 0.$$

Интегрируя второе уравнение системы:

$$q_2 + x_2 x_3 q_4 = 0,$$

составляем систему

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{0} = \frac{dy_4}{x_2 x_3};$$

ее интегралы

$$x_3 = C_3, \; y_4 - \frac{1}{2} x_2^2 x_3 = C_4.$$

Решения уравнения:

$$x_3, \; t_4 = y_4 - \frac{1}{2} x_2^2 x_3.$$

Берем за переменные

$$x_1, x_2, x_3, t_4.$$

Так как

$$Y_3\left(y_4 - \frac{1}{2} x_2^2 x_3\right) = -\frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \equiv 0,$$

новая система имеет вид

$$r_1 = 0, \; r_2 = 0, \; r_3 = 0.$$

Ей удовлетворяет функция

$$z = t_4.$$

Возвращаясь к старым переменным, последовательно находим:

$$z = t_4 = y_4 - \frac{1}{2} x_2^2 x_3 = x_4 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} x_3.$$

Итак одно из решений системы:

$$z = x_4 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} x_3,$$

а самое общее ее решение

$$z = \omega\left(x_4 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} x_3\right).$$

2) Найти самое общее решение системы

$$X_1(z) = x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0$$

$$X_2(z) = x_3 p_1 + x_4 p_2 - x_1 p_3 - x_2 p_4 = 0.$$

Исследуем, замкнута ли система. Так как

$$(X_1, X_2) = (-x_1 p_3 + x_2 p_4 + x_3 p_1 - x_4 p_2) -$$

$$- (x_3 p_1 - x_4 p_2 - x_1 p_3 + x_2 p_4) \equiv 0,$$

то система якобиева. Интегрируем первое уравнение системы:

$$x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0.$$

Составив уравнения характеристических линий

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_4}{-x_4},$$

легко находим интегралы

$$x_1 x_2 = y_2,\ x_2 x_3 = y_3,\ x_1 x_4 = y_4.$$

Взяв x_1, y_2, y_3, y_4 за новые независимые переменные, вычисляем:

$$X_2(y_2) = x_3 x_2 + x_4 x_1 = y_3 + y_4, \qquad X_2(y_3) = x_4 x_3 - x_1 x_2 = \frac{y_3 y_4}{y_2} - y_2.$$

$$X_2(y_4) = x_3 x_4 x_2 x_1 = \frac{y_3 y_4}{y_2} - y_2.$$

Данная система преобразуется в

$$q_1 = 0$$

$$(y_3 + y_4) q_2 + \left(\frac{y_3 y_4}{y_2} - y_2\right) q_3 + \left(\frac{y_3 y_4}{y_2} - y_2\right) q_4 = 0.$$

Берем второе уравнение. Система его характеристических линий

$$\frac{dy_2}{(y_3 + y_4) y_2} = \frac{dy_3}{y_3 y_4 - y_2^2} = \frac{dy_4}{y_3 y_4 - y_2^2}$$

имеет очевидный интеграл

$$y_4 - y_3 = C_1.$$

Для нахождения второго находим, пользуясь теоремой о равных отношениях:

$$\frac{dy_2}{(y_3+y_4)\,y_2} = \frac{y_4\,dy_3 + y_3\,dy_4 + y_2\,dy_2}{y_3\,y_4\,(y_3+y_4)},$$

откуда

$$y_2\,dy_3\,y_4 - y_3\,y_4\,dy_2 + y_2^2\,dy_2 = 0, \quad d\left(\frac{y_3\,y_4}{y_2} + y_2\right) = 0.$$

Второй интеграл системы, следовательно,

$$\frac{y_3\,y_4}{y_2} + y_2 = C_2.$$

Самое общее значение z значит

$$z = \omega\left(y_4 - y_3, \frac{y_3\,y_4}{y_2} + y_2\right) = \omega\,(x_1\,x_4 - x_2\,x_3,\ \ x_3\,x_4 + x_1\,x_2).$$

Проинтегрируем еще раз предложенную систему, переделав ее предварительно в нормальную, чтобы осветить значение выбранной для интегрирования якобиевой системы.

Решая относительно p_1 и p_2, находим:

$$Y_1(z) = p_1 + \frac{x_3\,x_4 - x_1\,x_2}{x_1\,x_4 + x_2\,x_3}\,p_3 - \frac{x_4^2 + x_2^2}{x_1\,x_4 + x_2\,x_3}\,p_4 = 0.$$

$$Y_2(z) = p_2 - \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1\,x_4 + x_2\,x_3}\,p_3 + \frac{x_3\,x_4 - x_1 x_2}{x_1\,x_4 + x_2\,x_3}\,p_4 = 0.$$

Интегрируем первое уравнение системы. Составляем систему

$$\frac{dx_1}{x_1\,x_4 + x_2\,x_3} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{x_3\,x_4 - x_1\,x_2} = \frac{dx_4}{-x_4^2 - x_2^2}.$$

Один из интегралов системы $x_2 = C_2$.

Умножая числитель и знаменатель первого, третьего и четвертого отношений соответственно на x_4, $-x_2$, x_1 и применяя теорему о равных отношениях, находим, что написанные отношения равны

$$\frac{x_4\,dx_1 + x_1\,dx_4 - x_2\,dx_3}{0},$$

т. е. что

$$x_4\,x_1 - x_2\,x_3 = C_3$$

есть другой интеграл системы, а

$$x_4\,x_1 - x_2\,x_3$$

одно из решений уравнения.

Вычисляя $Y_2(x_4 x_1 - x_2 x_3)$, мы могли бы найти еще одно решение уравнения $Y_1(z)$ на основании сказанного в § 27. Не пренебрегая этим, находим:

$$Y_2(x_4 x_1 - x_2 x_3) = -x_3 + \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1 x_4 + x_2 x_3} x_2 + \frac{x_3 x_4 - x_1 x_2}{x_1 x_4 + x_2 x_3} x_1 \equiv 0.$$

Новое решение не найдено; но вычисление не бесполезно, так как должно быть все равно выполнено при преобразовании системы. Умножая теперь числителя и знаменателя первого, третьего и четвертого отношений соответственно на x_2, x_4, x_3 и применяя теорему о равных отношениях, находим, что написанные отношения равны

$$\frac{x_2\,dx_1 + x_4\,dx_3 + x_3\,dx_4}{0},$$

откуда ясно, что последний интеграл системы и последнее решение уравнения соответственно

$$x_2 x_1 + x_3 x_4 = C_4$$

и

$$x_2 x_1 + x_3 x_4.$$

Вводим новые независимые переменные y_3 и y_4, положив

$$x_1,\ x_2,\ y_3 = x_4 x_1 - x_2 x_3,\quad y_4 = x_2 x_1 + x_3 x_4.$$

Так как

$$Y_2(x_2 x_1 + x_3 x_4) = x_1 - \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1 x_4 + x_2 x_3} x_4 + \frac{x_3 x_4 - x_1 x_2}{x_1 x_4 + x_2 x_3} x_3 \equiv 0,$$

то преобразованная система имеет вид

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0.$$

Ей удовлетворяют функции y_3 и y_4. Значит данной системе удовлетворяют

$$x_4 x_1 - x_2 x_3,\ x_2 x_1 + x_3 x_4$$

и самое общее ее решение

$$z = \omega(x_4 x_1 - x_2 x_3,\ x_2 x_1 + x_3 x_4),$$

где ω — произвольная функция двух ее аргументов.

3) Найти самое общее решение системы

$$X_1 = p_1 + p_2 + p_3 = 0,\quad X_2 = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0.$$

Вычисляя скобку Пуассона, находим

$$(X_1, X_2) = p_1 + p_2 + p_3 = X_1,$$

т. е. что система замкнутая, но не якобиева. Переведя ее в нормальную:

$$P_1 = p_1 - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} p_3 = 0, \qquad P_2 = p_2 - \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_1} p_3 = 0,$$

получаем якобиеву систему. Интегрируя первое уравнение и составив для него уравнения характеристических линий, получаем

$$\frac{dx_1}{x_2-x_1}=\frac{dx_2}{0}=\frac{dx_3}{-(x_3-x_2)}.$$

Интегралы системы:

$$x_2=y_2, \quad \frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}=y_3.$$

Так как

$$P_2(y_2)=1, \quad P_2(y_3)=0$$

второе уравнение в новых переменных

$$q_2=0,$$

откуда

$$z=\varphi(y_3)=\varphi\left(\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}\right).$$

4) Система

$$X_1=p_1+p_2-p_3=0, \quad X_2=x_2p_1+x_3p_2+x_1p_3=0$$

не замкнута, так как уравнение

$$(X_1, X_2)=p_1-p_2+p_3=0$$

не есть следствие уравнений системы.

Самое общее решение этой системы:

$$z=C,$$

где C произвольная постоянная.

30. **Задача Коши.** Имея дело с замкнутой системой (22), решенной относительно производных $p_1\, p_2, \ldots, p_m$, можно поставить следующим образом задачу о нахождении решения, удовлетворяющего заранее поставленным условиям. Даны числа:

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)},$$

причем выбраны так, что вблизи них коэффициенты системы (22) голоморфны как функции от $x_1, x_2, \ldots, x_m$, когда $x_{m+1}, \ldots, x_n$ заданы в некоторых областях.

Кроме того дана функция

$$\theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n),$$

голоморфная вблизи некоторых значений $x_{m+1}, \ldots, x_n$ из указанных областей.

Найти то решение системы (22), в котором

$$z=\theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \tag{31}$$

когда

$$x_1=x_1^{(0)}, \quad x_2=x_2^{(0)}, \ldots, \quad x_m=x_m^{(0)}. \tag{31$_1$}$$

Указанную задачу мы назовем задачей Коши.

Решение задачи получается просто, если предварительно ее решить в некоторых $n-m$ частных случаях.

Найдем сначала $n-m$ решений системы (22), положив в (31) функцию $\theta(x_{m+1},\ldots,x_n)$ последовательно равной $x_{m+1}, x_{m+2},\ldots,x_n$. Такие решения мы будем называть главными.

Значит, функции

$$\psi_{m+1}(x_1, x_2,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n),\ \psi_{m+2}(x_1,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots,$$
$$\psi_n(x_1,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n)$$

образуют главные решения, если имеем тождественно:

$$\psi_{m+1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1},\ldots,x_n)\equiv x_{m+1},$$
$$\psi_{m+2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}, x_{m+1},\ldots,x_n)\equiv x_{m+2},\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}, x_{m+1},\ldots, x_n)\equiv x_n.$$

Покажем, как найти главные решения, когда каким-нибудь образом найдены $n-m$ алгебраически независимых решений системы (22). Положим, что

$$\varphi_{m+1}(x_1, x_2,\ldots, x_m, x_{m+1},\ldots,x_n),\ \varphi_{m+2}(x_1,x_2,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n)\ldots,$$
$$\varphi_n(x_1,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n) \tag{32}$$

суть такие решения системы (22).

Составим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{m+1}(x_1,x_2,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots, x_n)=\varphi_{m+1}(x_1^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}, x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_n(x_1,x_2,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n)=\varphi_n(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}),\end{array}\right\} \tag{33}$$

в правых частях которой $x_1,\ldots,x_m$ заменены их начальными значениями, а $x_{m+1},\ldots,x_n$ некоторыми произвольно выбранными числами $x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$.

Если мы в уравнениях (33) заменим $x_1,\ldots,x_m$ их начальными значениями, то мы получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{m+1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)} x_{m+1},\ldots,x_n)=\varphi_{m+1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)},x_{m+1}^{(0)}\ldots,x_n^{(0)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_n(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}, x_{m+1},\ldots,x_n)=\varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}, x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}),\end{array}\right\} \tag{33$_1$}$$

которая имеет очевидное решение:

$$x_{m+1}^{(0)}=x_{m+1},\ldots, x_n^{(0)}=x_n. \tag{33$_2$}$$

Решим систему (33) относительно $x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$. Последнее возможно; мы показали в § 28, что из функций (32) нельзя исключить последних $n-m$ аргументов.

Примечание. Последнее было установлено в предположении, что первые m аргументов произвольны и, значит, имеет место, если $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$, достаточно произвольны. Решив в § 34 задачу Коши другой методой мы увидим, что условия, перечисленные в начале параграфа, достаточны.

Положим, что мы получим:

$$\left.\begin{array}{l} x_{m+1}^{(0)} = \psi_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(0)} = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n). \end{array}\right\} \tag{34}$$

Каждая из функций $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_n$ будет функцией от $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n$, как непосредственно видно из системы (33) и, значит, будет решением системы (22).

Далее система (34) равносильна системе (33). Значит система

$$\begin{array}{l} x_{m+1}^{(0)} = \psi_{m+1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(0)} = \psi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{array}$$

равносильна системе (33_1), а так как (33_1) равносильна системе (33_2) то, значит, мы имеем тождественно:

$$\begin{array}{l} \psi_{m+1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv x_{m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv x_n \end{array}$$

откуда вытекает, что

$$\psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \ldots, \psi_n$$

искомые главные решения.

Когда найдены главные решения, решение задачи Коши получается сразу. Нетрудно именно убедиться, что

$$z = \theta(\psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \ldots, \psi_n)$$

есть искомое решение.

Функция z—решение системы (22), так как z функция решений этой системы. При этом после замены $x_1, \ldots, x_m$ через $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ функция z обращается в

$$\theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n),$$

так как после этой системы $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_n$ обращаются в $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Отметим, что найденное нами решение единственное. Если бы задача имела два решения, то разность этих решений была бы решением системы, обращающимся тожественно в нуль по замене $x_1, x_2, \ldots, x_m$ их начальными значениями. Как решение системы, эта разность была бы некоторой функцией

$$\omega(\psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \ldots, \psi_n)$$

от главных решений; как таковая, она обращалась бы в

$$\omega(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$

после замены $x_1, x_2, \ldots, x_m$ их начальными значениями.

Отсюда ясно, что указанная разность ω равна нулю тожественно.

Рассмотрим для примера второй пример § 29. Мы нашли, что система замкнута и может быть преобразована в систему:

$$p_1 + \frac{x_3x_4 - x_1x_2}{x_1x_4 + x_2x_3} p_3 - \frac{x_4{}^2 + x_2{}^2}{x_1x_4 + x_2x_3} p_4 = 0$$

$$p_2 - \frac{x_1{}^2 + x_3{}^2}{x_1x_4 + x_2x_3} p_3 + \frac{x_3x_4 - x_1x_2}{x_1x_4 + x_2x_3} p_4 = 0,$$

которая имеет решениями:

$$x_4x_1 - x_2x_3, \quad x_2x_1 + x_3x_4.$$

Выбираем начальные значения $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ аргументов x_1, x_2. Числа $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ не должны быть одновременно нулями; если они не нули одновременно, то всегда можно выбрать начальные значения x_3 и x_4 так, чтобы $x_1x_4 + x_2x_3$ имели начальное значение, отличное от нуля.

Положим, для удобства $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} \neq 0$ и найдем соответствующие им главные решения. По данному выше правилу надо решить относительно $x_3^{(0)}, x_4^{(0)}$ систему уравнений

$$x_4x_1 - x_2x_3 = -x_2^{(0)} x_3^{(0)}, \quad x_2x_1 + x_3x_4 = x_3^{(0)} x_4^{(0)}.$$

Выполняя выкладки, находим:

$$x_3^{(0)} = \frac{x_2x_3 - x_4x_1}{x_2^{(0)}}, \quad x_4^{(0)} = x_2^{(0)} \frac{x_2x_1 + x_3x_4}{x_2x_3 - x_4x_1}.$$

Искомые главные решения:

$$\frac{x_2x_3 - x_4x_1}{x_2^{(0)}}, \quad x_2^{(0)} \frac{x_2x_1 + x_3x_4}{x_2x_3 - x_4x_1}.$$

Если надо найти то решение системы, в котором

$$z = \theta(x_3, x_4), \text{ когда } x_1 = 0, \quad x_2 = x_2^{(0)},$$

то искомое решение:

$$z = \theta\left(\frac{x_2x_3 - x_4x_1}{x_2^{(0)}}, \quad x_2^{(0)} \frac{x_2x_1 + x_3x_4}{x_2x_3 - x_4x_1}\right).$$

31. Исследование более общего случая. Если имеется система:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}p_1+X_1^{(2)}p_2+\ldots+X_1^{(m)}p_m+X_1^{(m+1)}p_{m+1}+\ldots+X_1^{(n)}p_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m^{(1)}p_1+X_m^{(2)}p_2+\ldots+X_m^{(m)}p_m+X_m^{(m+1)}p_{m+1}+\ldots+X_m^{(n)}p_n=0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

замкнутая, но ненормальная, то мы умеем решать поставленную в прошлом параграфе задачу Коши только тогда, когда система (1) разрешима относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и после решения дает систему, коэффициенты которой голоморфны вблизи чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ и некоторых начальных значений остальных аргументов, т. е. когда ее можно преобразовать в нормальную систему (22) со свойствами, описанными в прошлом параграфе.

Если считать, что коэффициенты системы (1) голоморфные функции вблизи указанных значений аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то это обстоятельство будет соблюдено, когда определитель

$$\begin{vmatrix} X_1^{(1)}, & X_1^{(2)}, \ldots, & X_1^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_m^{(1)}, & X_m^{(2)}, \ldots, & X_m^{(m)} \end{vmatrix} \qquad (35)$$

не обращается тождественно в нуль после замены $x_1, \ldots, x_m$ через $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$. Если именно он не равен тождественно нулю после этой замены, то можно выбрать начальные значения $x_{m+1}, \ldots, x_n$ так, чтобы его начальное значение было отлично от нуля и чтобы коэффициенты нормальной системы, полученной решением системы (1) относительно $p_1, \ldots, p_m$, оказались голоморфными вблизи начальных значений независимых переменных.

Если это условие не соблюдено, то не при всякой функции $\theta(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ система (1) может иметь голоморфное решение, обращающееся в $\theta(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, когда

$$x_1=x_1^{(0)}, \quad x_2=x_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_m=x_m^{(0)}. \qquad (31_1)$$

Чтобы убедиться в этом, условимся временно обозначать знаком

$$(X_i^{(k)})$$

результат замены в $X_i^{(k)}$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ числами $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$. При таком условном обозначении то обстоятельство, что определитель (35) равен нулю, когда $x_1, \ldots, x_m$ заменены через $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$, запишется так:

$$\begin{vmatrix} (X_1^{(1)}), & (X_1^{(2)}), & \ldots, & (X_1^{(m)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X_m^{(1)}), & (X_m^{(2)}), & \ldots, & (X_m^{(m)}) \end{vmatrix} \equiv 0. \qquad (35_1)$$

Полагаем, что z есть голоморфное решение, обращающееся в $\theta(x_{m+1},\ldots,x_n)$ когда выполнена замена (31_1). Подставляя в уравнения (1) вместо z его значение и заменяя, затем, в них $x_1, x_2,\ldots,x_m$ через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}$, получаем равенства:

$$\left.\begin{array}{l} (X_1^{(1)})(p_1)+(X_1^{(2)})(p_2)+\ldots+(X_1^{(m)})(p_m)+\\ +(X_1^{(m+1)})\dfrac{\partial\theta}{\partial x_{m+1}}+\ldots+(X_1^{(n)})\dfrac{\partial\theta}{\partial x_n}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (X_m^{(1)})(p_1)+(X_m^{(2)})(p_2)+\ldots+(X_m^{(m)})(p_m)+\\ +(X_m^{(m+1)})\dfrac{\partial\theta}{\partial x_{m+1}}+\ldots+(X_m^{(m)})\dfrac{\partial\theta}{\partial x_n}=0 \end{array}\right\} \tag{36}$$

в которых

$$(p_1),\quad (p_2),\ldots,\quad (p_m), \tag{37}$$

равные результатам замены в производных от z по $x_1, x_2,\ldots,x_m$ этих аргументов их начальными значениями, ограничены, если z было голоморфным решением.

Вследствие равенства нулю определителя (35_1), из уравнений (36) можно исключить функции (37) и получить одну или более зависимостей, связывающих производные от функции θ; одну, если есть минор определителя (35_1) не равный нулю; может быть несколько, если все миноры его нули.

Если хоть одна из этих зависимостей не соблюдена, система (1) не может иметь голоморфного решения, требуемого вида: она или совсем не имеет такого решения, или имеет не голоморфное, такое, в котором хоть одна из производных

$$p_1,\ p_2,\ldots,p_m$$

перестает быть конечной после замены $x_1, x_2, \ldots, x_m$ через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}$. Например, положив в примере прошлого параграфа

$$x_1^{(0)}=0,\quad x_2^{(0)}=0,$$

заключаем, что система примера 2 § 29 может иметь голоморфное решение, в котором

$$z=\theta(x_3,\ x_4),$$

когда

$$x_1=0,\quad x_2=0,$$

только тогда, когда

$$x_3\frac{\partial\theta}{\partial x_3}-x_4\frac{\partial\theta}{\partial x_4}=0,$$

т. е. когда θ — функция от произведения x_3x_4.

В этом случае наша система имеет бесчисленное множество требуемых решений.

Например, каждое решение этой системы, имеющее вид

$$z = \theta\,[x_3x_4 + x_1x_2 + (x_4x_1 - x_2x_3)\,\omega\,(x_3x_4 + x_1x_2,\ x_4x_1 - x_2x_3)] + \\ + (x_4x_1 - x_2x_3)\,\vartheta\,(x_3x_4 + x_1x_2,\ x_4x_1 - x_2x_3),$$

где ω и ϑ произвольные функции от их аргументов, обращается в $\theta(x_3\,x_4)$ при $x_1 = 0,\ x_2 = 0$.

Это обстоятельство имеет место и в общем случае; мы осветим его, занимаясь системами неоднородных уравнений.

32. Общий случай задачи Коши. Подобно тому как в случае одного уравнения, мы можем рассматривать следующую задачу:

Найти решение системы, в котором при

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \vartheta_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\ x_2 = \vartheta_2(x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots, \\ x_m = \vartheta_m(x_{m+1}, x_{m+2}\ldots,x_n) \end{aligned}\right\} \tag{31'}$$

имеем

$$z = \theta(x_{m+1}, x_{m+2},\ldots,x_n). \tag{31'$_1$}$$

Эта более общая задача сводится к рассмотренной введением новых независимых переменных.

Положив

$$x_1 - \vartheta_1 = \xi_1,\quad x_2 - \vartheta_2 = \xi_2,\ldots x_m - \vartheta_m = \xi_m,$$

мы сводим задачу к следующей: найти решение преобразованной системы, в которой при

$$\xi_1 = 0,\quad \xi_2 = 0,\ldots,\xi_m = 0:\quad z = \theta(x_{m+1},\ldots,x_n).$$

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar z}{\partial \xi_i},\quad i \leqslant m,\quad \frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar z}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar z}{\partial x_1}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_j} - \ldots - \frac{\partial \bar z}{\partial x_m}\frac{\partial \vartheta_m}{\partial x_j},\ j > m,$$

то система (1) преобразуется в систему

$$Z_k^{(1)}q_1 + \ldots + Z_k^{(m)}q_m + \overline{X_k^{(m+1)}}\,q_{m+1} + \ldots + \overline{X_k^{(n)}}\,q_n = 0,$$
$$(k = 1, 2,\ldots,m),$$

в которой $\bar z$ неизвестная функция новых независимых переменных, а $q_1,\ldots,q_n$ есть ее производные по этим переменным, $\overline{X}$ результат исключения старых переменных из соответственного коэффициента X и

$$Z_k^{(i)} = \overline{X_k^{(i)}} - \overline{X_k^{(m+1)}}\,\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_{m+1}} - \ldots - \overline{X_k^{(n)}}\,\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_n}. \tag{38}$$

Задача может не иметь решения, когда начальное значение определителя из коэффициентов $Z_k^{(i)}$ равно нулю; в этом случае функция $\theta(x_{m+1},\ldots,x_n)$ не может быть выбираемой произвольно.

33. Характеристическое многообразие. Обобщая сказанное в § 11 и 15, мы назовем *характеристическим многообразие измерения m*:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_{m+1}(x_1,\ldots,x_m,\ x_{m+1},\ldots,x_n)=b_{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n\ (x_1,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ldots,x_n)=b_n \\ z=c, \end{array}\right\} \qquad (39)$$

в котором φ *независимые решения системы* (1). Характеристическое многообразие (39) в случае системы m линейных уравнений зависит от $n-m+1$ параметров.

Вспоминая сказанное в § 11, из формул § 28 заключаем, что для получения характеристических многообразий, расположенных на решении системы (1), надо c заменить функцией остальных параметров $b_{m+1},\ldots,b_n$ и что всякое решение системы (1) есть геометрическое место его характеристических многообразий.

Как выяснено в § 30, для нахождения решения, в котором при

$$x_1=x_1^{(0)},\ldots,x_m=x_m^{(0)}:\quad z=\theta(x_{m+1},\ldots,x_n), \qquad (31)$$

т. е. для нахождения решения, заключающего данное многообразие вида (31) надо исключить $x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$ из уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{m+1}(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1}\ldots,x_n)=\varphi_{m+1}\ (x_1^{(0)},\ldots,\ x_m^{(0)},x_{m+1}^{(0)},\ldots,\ x_n^{(0)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)=\varphi_n\ (x_1^{(0)},\ldots,x_m^{(0)},x_{m+1}^{(0)},\ldots,\ x_n^{(0)}) \end{array}\right\} \quad (39')$$

$$z=\theta\ (x_{m+1}^{(0)},\ \ldots,x_n^{(0)}).$$

Мы именно там находили из первых $n-m$ уравнений (39′) $x_{m+1}^{(0)},\ \ldots,x_m^{(0)}$ с тем, чтобы найденные для них значения подставлять в последнее уравнение.

Но уравнения (39′) определяют группу характеристических многообразий, выбранных из (39), зависящих от $n-m$ параметров $x_{m+1}^{(0)},\ldots,\ x_n^{(0)}$ и проходящих через точки

$$\left[x_1^{(0)},\ \ldots,x_m^{(0)},\quad x_{m+1}^{(0)},\ \ldots,x_n^{(0)},\ \theta\,(x_{m+1}^{(0)},\ \ldots,x_n^{(0)})\right]$$

на многообразии (31).

Итак, для решения задачи Коши надо из характеристических многообразий (39), зависящих от $n-m+1$ параметров, выбрать группу зависящих от $n-m$ параметров и проходящих через точки на многообразии (31) и составить их геометрическое место.

Так как решение общей задачи Коши сводится к рассмотренной простым преобразованием независимых переменных, а в высказанном нами правиле выбор независимых переменных не фиксирован, это правило применимо и при решении общей задачи Коши, с той только разницей, что данные точки вместо того, чтобы принадлежать многообразию (31), должны принадлежать многообразию

$$x_1 = \vartheta_1 (x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_m = \vartheta_m (x_{m+1}, \ldots, x_n), \ z = \theta (x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

измерение которого также равно $n - m$.

Для примера, вернемся к первому примеру § 29 и найдем то его решение, в котором

$$\text{при } x_1 = x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = 1: \quad z = \omega (x_4).$$

Общее выражение точек, лежащих на последнем многообразии:

$$(\alpha, \alpha, 1, \ \omega(\alpha)),$$

где α — произвольный параметр.

Уравнение характеристического многообразия в рассматриваемом случае будет:

$$x_4 - \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2}{2} x_3 = b, \quad z = c;$$

уравнения многообразий, проходящих через указанные точки:

$$x_4 - \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2}{2} x_3 = \alpha - \alpha^2, \quad z = \omega (\alpha);$$

уравнение их геометрического места:

$$x = \omega \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x_4 + \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2}{2} x_3} \right).$$

Повторяя определения, данные в § 10 и 16, мы назовем характеристикой, расположенной на данном решении, всякое многообразие измерения $n - 1$, принадлежащее этому решению и некоторому другому.

Таким образом уравнения

$$z = \omega_1 (\psi_{m+1}, \ldots, \psi_n), \quad z = \omega_2 (\psi_{m+1}, \ldots, \psi_n)$$

определяют характеристику, расположенную на решении

$$z = \omega_1 (\psi'_{m+1}, \ldots \psi_m), \tag{40}$$

какова бы ни была функция ω_2, отличная от ω_1.

Не трудно убедиться, что если многообразие

$$z = \theta (x_2, \ldots, x_n), \ x_1 = \vartheta (x_2, \ldots, x_n) \tag{41}$$

есть характеристика, то соблюдены зависимости

$$\sum_{i=2}^{i=n} \overline{X_k^{(i)}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} - \overline{X_k^{(1)}} \equiv 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{42}$$

Действительно, положим, что из уравнения

$$\omega_1(\psi_{m+1},\ldots,\psi_n)-\omega_2(\psi_{m+1},\ldots,\psi_n)=0$$

можно найти x_1. Левая часть этого уравнения удовлетворяет системе (I); обозначим ее через $\psi(x_1,\ldots,x_n)$. Отыскивая производные от x_1, находим

$$\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_1}}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}+\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}=0,\qquad (i=2,\ldots,n). \tag{43}$$

Умножая последнее уравнение на $\overline{X_k^{(i)}}$, давая i значения $2,\ldots,n$ и складывая полученные произведения, находим, воспользовавшись тожествами

$$X_k^{(1)}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\ldots+X_k^{(n)}\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0,\qquad (k=1,\,2,\ldots,m), \tag{44}$$

что

$$\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_1}}\left\{\sum_{i=2}^{i=1}\overline{X_k^{(i)}}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}-\overline{X_k^{(1)}}\right\}\equiv 0,\qquad (k=1,\,2,\ldots,m)$$

откуда вытекают тожества (42). Функция θ не может быть выбираема произвольно; не трудно установить зависимости, которым она удовлетворяет.

Из сказанного ясно, что характеристика есть геометрическое место характеристических многообразий, зависящих от $n-m-1$ параметров.

Мы указали в прошлом параграфе, что задача Коши не всегда имеет определенное решение. Не трудно убедиться, что последнее обстоятельство имеет место, когда многообразие (31′) измерения $n-m$ принадлежит некоторой характеристике. Действительно, если

$$\psi(\vartheta_1,\,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_m,\,x_{m+1},\ldots,x_n)\equiv 0, \tag{45}$$

то

$$\sum_{i=1}^{i=m}\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}\,\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_j}+\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_j}}=0,\qquad (j=m+1,\ldots,n) \tag{43$_1$}$$

где черта наверху обозначает результат замены $x_1,\ldots,x_m$ через $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m$. Умножая последнее уравнение на $\overline{X_k^{(j)}}$ и пользуясь снова написанным выше тожеством, получаем

$$\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_1}}\,Z_k^{(1)}+\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_2}}\,Z_k^{(2)}+\ldots+\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_m}}\,Z_k^{(m)}\equiv 0,\quad (k=1,2,\ldots,m) \tag{46}$$

где $Z_k^{(i)}$ функции (38). Из последних тожеств заключаем, что определитель из коэффициентов $Z_k^{(i)}$, вообще говоря, равен нулю, что и требовалось доказать. Из сказанного ясно, что все миноры этого определителя нули, когда многообразие (31′) принадлежит двум характеристикам и т. д.

34. Метода Коши [1]**.** Положим, что дана система

$$\left.\begin{array}{l} X_1(z) = p_1 + a_1^{(m+1)} p_{m+1} + \dots + a_1^{(n)} p_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_m(z) = p_m + a_m^{(m+1)} p_{m+1} + \dots + a_m^{(n)} p_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (47)$$

и числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}$, вблизи которых коэффициенты системы голоморфны как функции от $x_1, x_2, \dots, x_m$, когда $x_{m+1}, \dots, x_n$ заданы в некоторых областях.

Условимся прежде всего обозначать знаком

$$(a_j^{(i)})_{k} \qquad (48)$$

результат замены в коэффициенте $a_j^{(i)}$ аргументов $x_1, x_2, \dots, x_k$ числами $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}$.

Таким образом $(a_j^{(i)})_1$ функция переменных $x_2, x_3, \dots, x_n$; функции (48) зависят только от $x_{k+1}, \dots, x_n$.

Лемма. *Система уравнений*

$$\left.\begin{array}{l} (X_2(z))_1 = p_2 + (a_2^{(m+1)})_1 p_{m+1} + \dots + (a_2^{(n)})_1 p_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (X_m(z))_1 = p_m + (a_m^{(m+1)})_1 p_{m+1} + \dots + (a_m^{(n)})_1 p_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (47_2)$$

замкнутая, если система (47) *замкнутая.*

Так как система (47) замкнутая, то для каждой скобки:

$$(X_i, X_j) \equiv 0 \qquad i > 1,\ j > 1,$$

ибо, будучи нормальной, она якобиева.

Но при составлении скобки функций X_i, X_j нам не приходится дифференцировать по x_1. Действительно, из вида скобки

$$(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial p_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial p_k} \right)$$

видно, что производные по x_1 от X_i, X_j умножаются на производные по p_1 от этих функций; но при $i > 1$, $j > 1$ функции X_i и X_j от p_1 не зависят. Из сказанного ясно, что безразлично, заменить ли x_1 через $x_1^{(0)}$ в последнем выражении, или выполнить эту

[1] Мы заимствуем название методы из книги: E. Delassus, Leçons sur la théorie analytique des équations.

замену в X_i и X_j, составив $(X_i)_1$, $(X_j)_1$, и затем вычислить эту скобку. Значит, если

$$i>1,\ j>1:\quad ((X_i)_1,\ (X_j)_1) = (X_i,\ X_j)_1 \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. *Если система* (47) *замкнутая и* $z=\psi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *какое-нибудь решение системы* (47_2), *а*

$$z=\varphi(x_1,\ x_2, \ldots, x_n), \tag{49}$$

то решение первого уравнения системы (47)

$$p_1 + a_1^{(m+1)} p_{m+1} + \ldots + a_1^{(n)} p_n = 0, \tag{50}$$

которое при $x_1 = x_1^{(0)}$ *обращается в* $\psi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, *то* (49) *решение системы* (47).

Из того, что $\psi(x_2, \ldots, x_n)$ решение системы (47_2) вытекает, что

$$(X_2(\psi))_1 \equiv 0,\quad (X_3(\psi))_1 \equiv 0, \ldots, (X_m(\psi))_1 \equiv 0.$$

Найдем решение уравнения (50), обращающееся в ψ при $x_1 = x_1^{(0)}$. Положим, что (49) такое решение. Тогда по теореме, доказанной в § 27, вследствие того, что система (47) якобиева, каждая из функций

$$X_2(\varphi),\ X_3(\varphi), \ldots, X_m(\varphi) \tag{51}$$

есть решение уравнения (50).

Но каждая из функций (51) обращается в нуль по замене x_1 через $x_1^{(0)}$. Действительно, так как

$$(\varphi)_1 = \psi,$$

мы имеем при $i>j$:

$$(X_i(\varphi))_1 = (X_i(\psi))_1 \equiv 0.$$

Следовательно, функции (51) суть решения уравнения (50), обращающиеся в нуль при $x_1 = x_1^{(0)}$.

Так как задача Коши для уравнения (50) при сделанных условиях имеет единственное решение и так как уравнению (50) удовлетворяет функция

$$z=0,$$

то из сказанного вытекает, что

$$X_2(\varphi) \equiv 0,\quad X_3(\varphi) \equiv 0, \ldots, X_m(\varphi) \equiv 0,$$

т. е. что функция φ, кроме первого уравнения системы, удовлетворяет и остальным ее уравнениям.

Из сказанного вытекает следующий способ решения задачи Коши. Присоединим к системе (47) и (47_2) еще $m-2$ системы:

$$\left.\begin{array}{l}(X_3(z))_2 = p_3 + (a_3^{(m+1)})_2\, p_{m+1} + \ldots + (a_3^{(n)})_2\, p_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (X_m\ (z))_2 = p_m + (a_m^{m+1})_2\, p_{m+1} + \ldots + (a_m^{(n)})_2\, p_n = 0\end{array}\right\}\ (47_3)$$

. . . .

. . . .

$$\left.\begin{array}{l}(X_{m-1}(z))_{m-2} = \\ = p_{m-1} + (a_{m-1}^{(m+1)})_{m-2}\, p_{m+1} + \ldots + (a_{m-1}^{(n)})_{m-2}\, p_n = 0 \\ {[X_m(z)]_{m-2}} = \\ = p_m + (a_m^{(m+1)})_{m-2}\, p_{m+1} + \ldots + (a_m^{(n)})_{m-2}\, p_n = 0\end{array}\right\}\ (47_{m-1})$$

$$(X_m(z))_{m-1} =$$

$$= p_m + (a_m^{(m+1)})_{m-1}\, p_{m+1} + \ldots + (a_m^{(n)})_{m-1}\, p_n = 0. \qquad (47_m)$$

Ищем решение уравнения (47_m), обращающееся в $0\,(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ при $x_m = x_m^{(0)}$. Положим, что

$$z = \psi_m(x_m,\ x_{m+1}, \ldots, x_n) \qquad (52)$$

есть искомое решение.

Ищем решение первого из уравнений (47_{m-1}), обращающееся в $\psi_m(x_m,\ x_{m+1}, \ldots, x_n)$ при $x_{m-1} = x_{m-1}^{(0)}$. На основании последней теоремы это решение удовлетворяет системе (47_{m-1}).

Положим, что

$$z = \psi_{m-1}(x_{m-1},\ x_m,\ x_{m+1}, \ldots, x_n) \qquad (52_1)$$

есть решение первого из уравнений (47_{m-1}). При $x_{m-1} = x_{m-1}^{(0)}$, $x_m = x_m^{(0)}$ оно обращается в $\theta(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ так как при $x_{m-1} = x_{m-1}^{(0)}$, ψ_{m-1} обращается в ψ_m, а ψ_m при $x_m = x_m^{(0)}$ обращается в θ. Поступая так далее, ищем решение:

$$z = \psi_{m-2}(x_{m-2},\ x_{m-1},\ x\ ,\ x_{m+1}, \ldots, x_n) \qquad (52_2)$$

первого уравнения системы (47_{m-2}), обращающееся в ψ_{m-1} при $x_{m-2} = x_{m-2}^{(0)}$. Функция ψ_{m-2} удовлетворяет системе (47_{m-2}) и обращается в θ при $x_{m-2} = x_{m-2}^{(0)}$, $x_{m-1} = x_{m-1}^{(0)}$, $x\ = x_m^{(0)}$; и т. д. Затем ищем решение первого уравнения системы (47_2), обращающееся в ψ_3 при $x_2 = x_2^{(0)}$. Если

$$z = \psi_2(x_2,\ x_3, \ldots, x_m,\ x_{m+1},\ x_n) \qquad (52_{m-2})$$

есть это решение, то оно удовлетворяет системе (47_2) и обращается в θ при $x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}$; наконец, ищем решение

$$z = \psi\,(x_1,\ x_2, \ldots, x_m,\ x_{m+1}, \ldots, x_n) \qquad (52_{m-2})$$

первого уравнения системы (47), обращающееся в ψ_2 при $x_1 = x_1^{(0)}$; функция ψ будет искомое решение системы (47).

Таким образом решение задачи требует интегрирования m уравнений: причем

одного уравнения с n независимыми переменными,
одного уравнения с $n-1$ независимыми переменными,
. . . .
одного уравнения с $n-m+1$ независимыми переменными.

Пример. Отыскивая решение системы примера 1 § 29:

$$p_1 + x_1x_3p_4 = 0, \quad p_2 + x_2x_3p_4 = 0, \quad p_3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\, p_4 = 0,$$

обращающееся в x_4 когда $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, мы можем начать интегрировать с 3-го уравнения и найти сначала решение системы

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0,$$

обращающееся в x_4 при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, считая, конечно, в этой системе независимыми переменными x_1, x_2 и x_4.

Этим решением будет $z = x_4$. Остается найти решение уравнения

$$p_3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\, p_4 = 0,$$

обращающееся в x_4 при $x_3 = 0$.

Последнему уравнению отвечает система

$$\frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{1} = \frac{dx_4}{\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

и интегралы Коши

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \quad x_4 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\, x_3 = x_4^{(0)}.$$

Искомое решение будет

$$z = x_4 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\, x_3.$$

35. Подстановка Майера. Положим, что система (47) замкнутая и дадим ей для краткости вид:

$$\left.\begin{aligned} X_1(z) &= p_1 + A_1 = 0, \\ X_2(z) &= p_2 + A_2 = 0, \ldots, \\ X_m(z) &= p_m + A_m = 0. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Отыскивая решение ее, обращающееся в $\theta(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, когда $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}$, введем новые переменные, положив:

$$x_1 = x_1^{(0)} + y_1, \quad x_2 = x_2^{(0)} + y_1y_2, \ldots, x_m = x_m^{(0)} + y_1y_m \qquad \textbf{(54)}$$

и оставляя переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ теми же. За начальное значение y_1 следует взять нуль; начальные значения $y_2, \ldots, y_m$

не определены приведенными выше равенствами, и их можно взять произвольно. Обозначая буквами

$$q_1, q_2, \ldots, q_m, \; q_{m+1}, \ldots, q_n$$

производные от z по новым переменным, имеем

$$\begin{gathered} q_1 = p_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_m y_m \\ q_2 = p_2 y_1, \ldots, q_m = p_m y_1 \\ q_{m+1} = p_{m+1}, \ldots, q_n = p_n. \end{gathered}$$

Следовательно, если

$$(A_1), \quad (A_2), \ldots, (A_m)$$

обозначают результаты введения новых переменных в функции $A_1, \ldots, A_m$, то новые уравнения системы имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 + (A_1) + (A_2)\, y_2 + \ldots + (A_m)\, y_m = 0 \\ q_2 + (A_2)\, y_1 = 0, \ \ldots\ldots, \ q_m + (A_m)\, y_1 = 0. \end{array}\right\} \tag{55}$$

Применяя методу прошлого параграфа, мы сводим интегрирование системы сначала к нахождению решения системы:

$$q_2 = 0, \ldots, q_m = 0, \tag{56}$$

обращающегося в $0\,(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, когда $y_2, \ldots, y_m$ равны начальным значениям.

Такое решение, очевидно, будет

$$z = \theta\,(x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

После этого остается найти то решение уравнения

$$q_1 + (A_1) + (A_2)\, y_2 + \ldots + (A_m)\, y_m = 0, \tag{57}$$

которое обращается в $\theta\,(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ при $y_1 = 0$ и вернуться к старым переменным. Интегрирование системы (47) сводится таким образом подстановкой (54) к интегрированию одного уравнения (57), хотя, вообще говоря, несколько сложного вида.

П р и м е р. Проинтегрировать систему:

$$\begin{gathered} X_1(z) = p_1 + (x_2 + x_4 - 3x_1)\, p_3 + (x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4)\, p_4 = 0 \\ X_2(z) = p_2 + (x_3 x_4 - x_2)\, p_3 + (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2)\, p_4 = 0. \end{gathered}$$

Не зная, замкнута ли последняя система, мы не можем еще поставить задачи Коши. Составляя скобки Пуассона, находим

$$\begin{gathered} (X_1,\ X_2) = (x_2 + x_4 - 3x_1)\,(x_4 p_3 + x_1 x_4 p_4) + \\ + (x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4)\,(x_3 p_3 + x_1 x_3 p_4) - \\ - (p_3 + x_1 p_4) - (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2)\,(p_3 + x_1 p_4), \end{gathered}$$

откуда ясно, что, приравняв нулю эту скобку, мы получаем уравнение

$$p_3 + x_1 p_4 = 0,$$

независимое от данных.

Присоединив это уравнение к системе, мы преобразуем ее в систему:

$$Y_1(z) = p_1 + (x_3 + 3x_1^2)\, p_4 = 0$$
$$Y_2(z) = p_2 + x_2 p_4 = 0$$
$$Y_3(z) = p_3 + x_1 p_4 = 0.$$

Последняя система есть замкнутая. Действительно,

$$(Y_1,\ Y_2) \equiv 0, \quad (Y_1,\ Y_3) = p_4 - p_4 \equiv 0, \quad (Y_2,\ Y_3) \equiv 0.$$

Ищем решение последней системы, обращающееся в x_4 при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Положив

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1 y_2, \quad x_3 = y_1 y_3,$$

мы заменяем интегрирование системы нахождением того решения уравнения:

$$q_1 + (y_1 y_3 + 3y_1^2)\ p_4 + y_1 y_2 p_4 \cdot y_2 + y_1 p_4 \cdot y_3 = 0,$$

т. е. уравнения

$$q_1 + (2y_1 y_3 + 3y_1^2 + y_1 y_2^2)\ p_4 = 0,$$

в котором z обращается в x_4 при $y_1 = 0$.

Интегрируя систему, отвечающую последнему уравнению:

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dy_2}{0} = \frac{dy_3}{0} = \frac{dx_4}{2y_1 y_3 + 3y_1^2 + y_1 y_2^2},$$

легко находим интегралы Коши:

$$y_2 = y_2^{(0)}, \quad y_3 = y_3^{(0)}, \quad x_4 - y_1^2 y_3 - y_1^3 - \frac{1}{2}\ y_1^2 y_2^2 = x_4^{(0)},$$

откуда вытекает, что искомое решение будет:

$$z = x_4 - y_1^2 y_3 - y_1^3 - \frac{1}{2}\ y_1^2 y_2^2.$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем:

$$z = x_4 - x_1 x_3 - x_1^3 - \frac{1}{2}\, x_2^2.$$

36. Нахождение одного решения системы. Покажем в заключение, как можно иногда найти решение замкнутой нормальной системы

$$X_1(z) = 0,\ X_2(z) = 0,\ \ldots,\ X_m(z) = 0. \qquad (58)$$

Такую задачу, как мы увидим, нам придется решать, применяя так называемую *вторую методу Якоби.*

Мы считаем, что система решена относительно производных $p_1, \ldots, p_m$.

Ищем какое-нибудь решение φ_1 уравнения

$$X_1(z) = 0, \qquad (59)$$

отличное от очевидных решений $x_2, x_3, \ldots, x_m$.

Так как φ_1 решение уравнения (59), а система (58) якобиева, то

$$X_2(\varphi_1) = \varphi_2$$

есть тоже решение уравнения (59). Если φ_2 решение, алгебраически не зависящее от $\varphi_1, x_2, \ldots, x_m$, то вычисляем снова:

$$X_2(\varphi_2) = \varphi_3$$

и получаем новое решение уравнения (59). Если φ_3 алгебраически независимо от $\varphi_1, \varphi_2, x_2, \ldots, x_m$, продолжаем так далее, пока после нескольких операций, число которых не превышает $n-1$, не найдем решения φ_{k+1}, выражающегося через ранее найденные и получим:

$$X_2(\varphi_1) = \varphi_2,\ X_2(\varphi_2) = \varphi_3,\ \ldots, X_2(\varphi_k) = \omega\,(x_2, x_3, \ldots, x_m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$$

Пробуем теперь удовлетворить первым двум уравнениям системы

$$X_1(z) = 0,\ X_2(z) = 0, \tag{60}$$

положив

$$z = \vartheta\,(x_2, x_3, \ldots, x_m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k). \tag{61}$$

Функция z, как функция решений уравнения (59), первому из уравнений (60) удовлетворяет, какова бы она ни была. Подставляя вместо z его значение во второе уравнение, находим:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} X_2\,(x_2) + \frac{\partial\vartheta}{\partial x_3} X_2\,(x_3) + \ldots + \frac{\partial\vartheta}{\partial x_m} X_2\,(x_m) +$$
$$+ \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_1} X_2\,(\varphi_1) + \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_2} X_2\,(\varphi_2) + \ldots + \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_k}\,\omega\,(x_2, \ldots \varphi_k) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_1}\varphi_2 + \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_2}\varphi_3 + \ldots + \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_k}\omega\,(x_2, x_3, \ldots, x_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_k) = 0. \tag{62}$$

Если (61) какое-нибудь решение уравнения (62), мы получим из него, заменив $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ их значениями, некоторое решение ψ_1 системы (60), отличное от $x_3, \ldots, x_m$, очевидных решений этой системы; если бы ψ_1 было равно функции от этих аргументов, то между $x_2, x_3, \ldots, x_m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ существовала бы некоторая зависимость, что противно предположению.

Так как ψ_1 решение системы (60)

$$X_3\,(\psi_1) = \psi_2$$

есть также решение этой системы; если ψ_2 алгебрически не связано с $x_3, \ldots, x_m\ \psi_1$, то имеем

$$X_3\,(\psi_2) = \psi_3,$$

которое тоже является решением системы (60) и продолжаем так далее, пока не найдем решение системы, алгёбраически выражающееся через данные. Мы получим:

$$X_3\,(\psi_1) = \psi_2,\ X_3\,(\psi_2) = \psi_3, \ldots, X_3\,(\psi_l) = \omega\,(x_3, \ldots, x_m, \psi_1, \ldots, \psi_l).$$

Пробуем теперь удовлетворить первым трем уравнениям системы:

$$X_1(z)=0,\ X_2(z)=0,\ X_3(z)=0, \tag{63}$$

положив

$$z=\vartheta(x_3,\ \ldots,\ x_m,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_l). \tag{64}$$

Функция z удовлетворяет первым двум уравнениям системы (63) при всяком выборе ϑ. Чтобы она удовлетворяла и последнему уравнению, надо, чтобы ϑ удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x_3}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_1}\psi_2+\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_2}\psi_3+\ldots+\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_l}\omega(x_3,\ \ldots,\ x_m,\ \psi_1,\ \ldots,\psi_l)=0. \tag{65}$$

Найдя решение (64) последнего уравнения и выразив его через $x_1,\ \ldots,\ x_n$, мы возобновляем операции, привлекая последовательно уравнения

$$X_4(z)=0,\ \ldots,\ X_m(z)=0,$$

пока не найдем решения всей системы (58).

Пример. Найти решение системы

$$\begin{aligned}X_1(z)&=2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0\\ X_2(z)&=2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0\\ X_3(z)&=x_2x_4^2p_3+x_1x_3x_4p_4+x_1x_3x_5p_5=0.\end{aligned}$$

Система эта не нормальна, но замкнута. Действительно:

$$(X_1,\ X_2)\equiv 0,\ (X_1,\ X_3)=2x_3^2X_3(z)-2x_1x_3X_1(z),\ (X_2,X_3)\equiv 0,$$

Уравнение

$$2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0$$

имеет решение $\varphi_1=\frac{x_5}{x_4}$, как видно из последнего уравнения системы

$$\frac{dx_1}{2x_2x_4^2}=\frac{dx_2}{0}=\frac{dx_3}{0}=\frac{dx_4}{x_3^2x_4}=\frac{dx_5}{x_3^2x_5}.$$

Подставляя это решение в выражение:

$$\frac{1}{2x_2}X_2(z),$$

находим

$$\frac{1}{2x_2}X_2\left(\frac{x_5}{x_4}\right)=\frac{x_5}{x_2x_4}=\frac{1}{x_2}\varphi_1.$$

Положив

$$z=\vartheta\ (x_2,\ x_3,\ \varphi_1),$$

мы получаем для ϑ уравнение:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\varphi_1}{x_2}=0,$$

из которого ясно, что можно положить

$$\vartheta=\frac{\varphi_1}{x_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x_2}\varphi_1 = \frac{x_5}{x_2 x_4} = \psi_1$$

удовлетворяет первым двум уравнениям системы.

Подставляя это ψ_1 в выражение:

$$\frac{1}{x_2 x_4^2} X_3(z),$$

видим, что

$$\frac{1}{x_2 x_4^2} X_3\left(\frac{x_5}{x_2 x_4}\right) = 0.$$

Значит

$$z = \frac{x_5}{x_2 x_4}$$

есть решение предложенной системы.

Примечание. Мы предположили, что система (58) нормальная. Если система (58) якобиева, не будучи нормальной, попытка применить к ней указанный прием не всегда может удасться. Если, например, мы получим, что

$$X_2(\varphi_1) = C = \text{постоянному},$$

то процесс первого шага придется считать законченным и решение системы (60) найденным; но это решение есть постоянное, почему непригодно для наших целей.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

37. Скобки Якоби. Переходя к изучению систем неоднородных уравнений, рассмотрим прежде всего некоторые образования, аналогичные скобкам Пуассона.

Положим, что даны две функции

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n), f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) \quad (1)$$

от аргументов

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n \quad (2)$$

и положим

$$[F, f] = \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]. \quad (3)$$

Выражение

$$[F, f]$$

называется скобкой Якоби

Если функции (1) не зависят от z, то частные производные $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ равны нулю, и скобка Якоби не отличается от скобки Пуассона. Скобки Якоби обладают свойствами, аналогичными свойствам скобок Пуассона.

Ясно, именно, что

I) $$[F, f] = -[f, F]$$

и что

II) $$[F, Cf] = C[F, f]$$

III) $$[F, f_1 + f_2] = [F, f_1] + [F, f_2].$$

Действительно

$$\frac{\partial Cf}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial Cf}{\partial z} = C\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial Cf}{\partial p_k} = C\frac{\partial f}{\partial p_k}$$

$$\frac{\partial(f_1+f_2)}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial(f_1+f_2)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \\ + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial f_2}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial f_1 + f_2}{\partial p_k} = \frac{\partial f_1}{\partial p_k} + \frac{\partial f_2}{\partial p_k};$$

так как

$$\frac{\partial \lambda f}{\partial x} + \frac{\partial \lambda f}{\partial z} p_k = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial f}{\partial z}\right) + f\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial \lambda f}{\partial p_k} = \lambda \frac{\partial f}{\partial p_k} + f_k \frac{\partial \lambda}{\partial p_k},$$

то очевидно имеем

IV) $$[F, \lambda f] = \lambda[F, f] + f[F, \lambda].$$

Положим

$$f = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s).$$

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_k} = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_k}$$

и, значит,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l}\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_l}\right),$$

откуда имеем

$$[F, f] = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial F}{\partial z}\right) =$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial F}{\partial p_k}\cdot\sum_{l=1}^{l=s}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l}\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial \varphi_l}{\partial z}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\sum_{l=1}^{l=s}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]=$$

$$=\sum_{l=1}^{l=s}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l}\left[\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial \varphi_l}{\partial z}\right)-\frac{\partial \varphi_l}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right].$$

Итак

$$[F,\ \Phi(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_s)]=\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}[F,\ \varphi_1]+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}[F,\ \varphi_2]+$$

V) $$+\ldots+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_s}[F,\ \varphi_s].$$

Равенство, которое точно соответствовало бы тожеству Якоби, для скобки Якоби не справедливо.

Условившись писать для сокращения письма

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{df}{dx_k}$$

мы можем равенству (3) дать вид

$$[F,\ f]=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{df}{dx_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{dF}{dx_k}\right). \qquad (3')$$

Примечание. Мы упомянули, что равенство, точно соответствующее тожеству Якоби, не справедливо. Составляя выражение, аналогичное его левой части, мы именно получим:

$$[F,[f,\ \Phi]]+[f,\ [\Phi,\ F]]+[\Phi,\ [F,\ f]]=\frac{\partial F}{\partial z}[f,\ \Phi]+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial z}[\Phi,\ F]+\frac{\partial \Phi}{\partial z}[F,\ f]. \qquad (4)$$

Действительно, прежде всего, рассуждая как в § 22, мы можем установить, что левая часть последнего равенства не зависит от вторых производных от F, f, Φ. Чтобы показать, что оно не зависит от вторых производных от Φ, рассмотрим сумму

$$[F,\ [f,\ \Phi]]+[f,\ [\Phi,\ F]],$$

которая одна только и могла бы содержать эти производные.

Положив

$$[F,\ \Phi]=X_1(\Phi),\quad [f,\ \Phi]=X_2(\Phi),$$

трактуя в операторах X_1, X_2 все аргументы $x_1\ldots,x_n$, z, p_1, $\ldots,p_n$

как независимые переменные, мы можем последней сумме дать вид

$$[F, [f, \Phi]] + [f, [\Phi, F]] = [F, [f, \Phi]] - [f, [F, \Phi]] =$$
$$= X_1 [X_2 (\Phi)] - X_2 [X_1 (\Phi)],$$

откуда ясно, что наше последнее утверждение справедливо.

Следовательно, вычисляя (4), достаточно сосредоточить свое внимание на членах, зависящих только от производных первого порядка. Пренебрегая поэтому членами, зависящими от вторых производных, мы можем писать:

$$[F, [f, \Phi]] = \ldots - \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial z}\right) \frac{dF}{dx_k} =$$
$$= \ldots + \frac{\partial f}{\partial z} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \frac{dF}{dx_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{dF}{dx_k}.$$

Выполняя круговую перестановку, получаем:

$$[f, [\Phi, F]] = \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{df}{dx_k} - \frac{\partial F}{\partial z} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \frac{df}{dx_k}.$$

$$[\Phi, [F, f]] = \ldots + \frac{\partial F}{\partial z} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{d\Phi}{dx_k} - \frac{\partial f}{\partial z} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{d\Phi}{dx_k}.$$

Складывая последние равенства, получаем, так как члены, содержащие вторые производные, сокращаются:

$$[F, [f, \Phi]] + [f, [\Phi, F]] + [\Phi, [F, f]] = \frac{\partial F}{\partial z} [f, \Phi] +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z} [\Phi, F] + \frac{\partial \Phi}{\partial z} [F, f],$$

как и требовалось.

В ближайших главах нам не придется пользоваться последним равенством.

Мы помещаем его в этом примечании, чтобы иметь в одном месте все свойства скобок Якоби.

38. Замечание о скобках Якоби. Равенство (3′) есть пока равенство символическое, данное для более легкого запоминания равенства (3). Если считать, что в (1) z, p_1, $\ldots$, p_n суть функции от x_1, $\ldots$, x_n, причем p_1, $\ldots$, p_n, суть производные от z по x_1, $\ldots$, x_n, то производные от f и F по x_1 $\ldots$, x_n надо вычислять по формулам:

$$\frac{df}{dx_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_k} +$$
$$+ \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_k}.$$

Считая, что z есть функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $p_1 \ldots, p_n$ ее производные по этим аргументам, составим выражение:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \cdot \frac{df}{dx_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \cdot \frac{dF}{dx_k} \right) \tag{5}$$

и докажем теорему.

Теорема. *Выражение* (5) *не зависит от вторых производных от функции* z. Чтобы установить справедливость теоремы, заметим прежде всего, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}.$$

Следовательно, для нахождения коэффициента при $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ в сумме

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \cdot \frac{df}{dx_k} \tag{6}$$

надо принимать во внимание два слагаемых этой суммы: то слагаемое, в котором выполняется дифференцирование по x_j, и то слагаемое, в котором выполняется дифференцирование по x_i.

Коэффициент при

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j}$$

в том слагаемом суммы (6), которое дифференцируется по x_j, равен

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

коэффициент же при

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$$

в слагаемом суммы (6), которое дифференцируется по x_i, равен

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j}.$$

Следовательно, коэффициент при $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ в сумме (6) равен

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_j}. \tag{7}$$

Так как сумма (7) не меняется от перестановки F и f, то коэффициент при $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ в сумме

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{dF}{dx_k}$$

равен тому же числу (7), откуда ясно, что производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ в сумме (5) сокращается, а это и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы ясно, что записанная символически в виде (3′) скобка Якоби равна выражению (5), если в функциях (1) z трактуется как функция от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

39. Случай линейных выражений. Положим теперь, что функции F и f линейные функции от $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Положим

$$\left.\begin{aligned} X_1(z) &= X_1^{(1)} p_1 + X_1^{(2)} p_2 + \ldots + X_1^{(n)} p_n - X_1^{(0)} \\ X_2(z) &= X_2^{(1)} p_1 + X_2^{(2)} p_2 + \ldots + X_2^{(n)} p_n - X_2^{(0)}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где коэффициенты $X_1^{(i)}$ и $X_2^{(i)}$ зависят от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

Скобка

$$[X_1, X_2] = \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial X_1}{\partial p_k}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial X_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial X_2}{\partial p_k}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)\right]$$

нелинейная функция от $p_1, p_2, \ldots, p_n$; действительно, слагаемые

$$p_k \frac{\partial X_2}{\partial z}, \quad p_k \frac{\partial X_1}{\partial z}$$

функции второй степени от этих аргументов. Оценим значение членов нелинейных относительно $p_1, \ldots, p_n$. Имеем, так как

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_k} = X_1^{(k)}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = X_2^{(k)},$$

что

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial X_1}{\partial p_k} p_k \frac{\partial X_2}{\partial z} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial X_2}{\partial p_k} p_k \frac{\partial X_1}{\partial z} = \frac{\partial X_2}{\partial z} \sum_{k=1}^{k=n} X_1^{(k)} p_k -$$

$$- \frac{\partial X_1}{\partial z} \sum_{k=1}^{k=n} X_2^{(k)} p_k = \frac{\partial X_2}{\partial z}\left(X_1(z) + X_1^{(0)}\right) - \frac{\partial X_1}{\partial z}\left(X_2(z) + X_2^{(0)}\right);$$

значит

$$[X_1, X_2] = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial X_1}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_k} - \frac{\partial X_2}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_k}\right) + X_1^{(0)} \frac{\partial X_2}{\partial z} -$$

$$- X_2^{(0)} \frac{\partial X_1}{\partial z} + \frac{\partial X_2}{\partial z} X_1(z) - \frac{\partial X_1}{\partial z} X_2(z).$$

Из последнего выражения ясно, что если $p_1, \ldots, p_n$ выбраны так, что удовлетворяют уравнениям

$$X_1(z) = 0, \; X_2(z) = 0,$$

рассматриваемым как алгебраические уравнения относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то сумма членов второго измерения относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ в скобке $[X_1, X_2]$ равна нулю.

Положим, откидывая в (8) свободные члены:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X_1}(z) &= X_1^{(1)}p_1 + X_1^{(2)}p_2 + \ldots + X_1^{(n)}p_n \\ \overline{X_2(z)} &= X_2^{(1)}p_1 + X_2^{(2)}p_2 + \ldots + X_2^{(n)}p_n \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

не трудно убедиться, что

$$[X_1, X_2] = \overline{X_1}(X_2(z)) - \overline{X_2}(X_1(z)).$$

Действительно, трактуя z как функцию от $x_1, \ldots, x_n$, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ как ее производные, на основании сказанного в § 38 и равенств (8′) имеем

$$[X_1, X_2] = \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial X_1}{\partial p_k}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial X_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial X_2}{\partial p_k}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial X_1}{\partial p_k}\frac{dX_2}{dx_k} - \frac{\partial X_2}{\partial p_k}\cdot\frac{dX_1}{dx_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n}\left(X_1^{(k)}\frac{dX_2}{dx_k} - X_2^{(k)}\frac{dX_1}{dx_k}\right) = \overline{X_1}(X_2) - \overline{X_2}(X_1),$$

что и требовалось доказать.

40. Система неоднородных уравнений. Положим теперь, что дана система из m неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} X_1(z) &= X_1^{(1)}p_1 + X_1^{(2)}p_2 + \ldots + X_1^{(n)}p_n - X_1^{(0)} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m(z) &= X_m^{(1)}p_1 + X_m^{(2)}p_2 + \ldots + X_m^{(n)}p_n - X_m^{(0)} = 0. \end{aligned}\right| \qquad (9)$$

Изучение системы (9) как системы уравнений первой степени относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, указывает на следующие возможности.

I. Может случиться, что система допускает решение относительно m из n аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, т. е. что уравнения (9) линейно независимы относительно этих аргументов.

II. Может также случиться, что из уравнений системы (9) нельзя найти m из n аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, но можно все их исключить.

В этом последнем случае могут обнаружиться две возможности.

1) Исключение аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ приводит к тожествам; в этом случае часть уравнений (9) линейные функции от остальных. Эти уравнения могут быть отброшены, и число уравнений системы

можно уменьшить, заменив при этом систему другой, подходящей к случаю (I).

2) Исключение аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ дает одну или несколько зависимостей, связывающих аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$:

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0. \tag{10}$$

В этом последнем случае опять могут обнаружиться две возможности: или

a) среди зависимостей (10) есть одна, не заключающая z:

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{10'}$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (9) не имеет решений: именно, предположение, что решение есть и уравнения (9) совместны, приводит к равенству (10′), очевидно невозможному, так как оно ограничивает независимые переменные. Но возможно,

b) что все зависимости (10) содержат z. Тогда из одной из них можно это z найти без каких-либо интегрирований. Может случиться, что найденное z удовлетворяет всем уравнениям (9), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. В этом случае находится решение системы (9) без интегрирования; но может случиться, что найденное z не удовлетворяет одному нз уравнений системы; в этом случае система не имеет решений.

Итак, предварительное изучение системы (9) приводит к заключению, что или она линейно независима (случай I), или может быть заменена линейно независимой системой с меньшим числом уравнений (случай II, 1), если она вообще имеет решение или, если это решение не найдено попутно (II, 2), что она не имеет решений.

41. Замкнутая система. Положим, что система (9) линейно независима относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда можно найти некоторые m из этих аргументов, скажем $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Составим всевозможные скобки Якоби из функций $X_1, \ldots, X_m$:

$$[X_i, X_j]. \tag{11}$$

По сказанному в § 39

$$[X_i, X_j] = \overline{X}_i(X_j(z)) - \overline{X}_j(X_i(z)); \tag{12}$$

значит, всякая функция z, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений (9), т. е. обращающая в нуль $X_i(z)$ и $X_j(z)$, обращает в нуль и скобку (11).

По сказанному в том же параграфе:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial p_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \frac{\partial X_j}{\partial p_k} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) + X_i^{(0)} \frac{\partial X_j}{\partial z} -$$

$$- X_j^{(0)} \frac{\partial X_i}{\partial z} + \frac{\partial X_j}{\partial z} X_i(z) - \frac{\partial X_i}{\partial z} X_j(z), \tag{13}$$

откуда ясно, что всякое решение системы (9) должно удовлетворять и каждому из линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial X_j}{\partial x_k}-\frac{\partial X_j}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)+X_i^{(0)}\frac{\partial X_j}{\partial z}-X_j^{(0)}\frac{\partial X_i}{\partial z}=0. \qquad (13')$$

Итак, к системе линейных уравнений (9) можно присоединить еще столько линейных уравнений, сколько можно составить скобок (12). Может случиться, что каждое из этих присоединенных уравнений есть следствие уравнений системы, т. е. линейная функция от X_1, X_2, ..., X_m. В этом случае систему (9) мы назовем *замкнутой*. Вследствие равенства (13) условием замкнутости системы (9) служит для каждой скобки Якоби справедливость равенства

$$[X_i, X_j] = A_1X_1(z) + A_2X_2(z) + \ldots + A_mX_m(z). \qquad (14)$$

Теорема. *Какова бы ни была система* (9), *можно после ограниченного числа действий заменить ее замкнутой системой линейных и линейно независимых уравнений, или убедиться, что система* (9) *не имеет решений, или же найти ее решение.*

Если система замкнута, то после присоединения к ней всех линейных уравнений (13′) мы получим систему, подходящую под случай (II, 1), в котором вдобавок каждое из вновь присоединенных уравнений есть следствие ранее данных. Значит, если система не замкнутая и мы не имеем дела со случаем (II, 2), в котором или находится решение без интегрирований, или устанавливается отсутствие решений, мы имеем дело или со случаем (I), или со случаем (II, 1), в котором одно из присоединенных уравнений не есть следствие ранее данных.

В этих случаях после присоединения уравнений (13′) система (9) заменяется другой, также из линейно независимых уравнений, в которой число уравнений больше числа уравнений системы (9). С этой системой мы можем возобновить выполненную операцию присоединения скобок Якоби.

Система, в которой $n+1$ уравнение, не может быть алгебраически независимой относительно n аргументов p_1, p_2, ..., p_n; найденные из некоторых n уравнений, все эти аргументы подстановкой в $n+1$ уравнение исключаются.

Так как каждая операция присоединения скобок Якоби, если не приводит к нахождению решения системы и не устанавливает невозможности существования решения, увеличивает число уравнений по крайней мере на единицу, ясно, что после $n-m$ возобновлений этой операции мы или получим замкнутую систему, или установим, что система не имеет решений, или же найдем ее решение.

42. Задача о нахождении неособенных решений. Положим, что система (9) замкнутая. Рассуждая как в § 13, мы сведем нахождение ее решения к интегрированию замкнутой системы однородных уравнений. Для этого, вместо того, чтобы непосредственно искать функцию z, удовлетворяющую системе (9), мы будем искать уравнение

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0, \tag{15}$$

которому эта функция удовлетворяет. Считая, что z есть решение уравнения (15), мы, как известно, найдем производные от z по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, подставляя в выражения

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}}, \quad p_2 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial z}}, \quad \ldots, \quad p_n = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}} \tag{16}$$

вместо z его значение, найденное решением уравнений (15).

Отсюда вытекает, что выражения, полученные из уравнения (9) после замены в них $p_1, p_2, \ldots, p_n$ их выражениями (16):

$$\left.\begin{array}{l}
X_1^{(1)}\dfrac{\partial V}{\partial x_1} + X_1^{(2)}\dfrac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_1^{(n)}\dfrac{\partial V}{\partial x_n} + X_1^{(0)}\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \\
X_2^{(1)}\dfrac{\partial V}{\partial x_1} + X_2^{(2)}\dfrac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_2^{(n)}\dfrac{\partial V}{\partial x_n} + X_2^{(0)}\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_m^{(1)}\dfrac{\partial V}{\partial x_1} + X_m^{(2)}\dfrac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_m^{(n)}\dfrac{\partial V}{\partial x_n} + X_m^{(0)}\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0
\end{array}\right\} \tag{17}$$

должны обращаться в нуль после замены в них z его значением, найденным из уравнения (15).

Пока, однако, задача нахождения решения системы (9) сведена нами к более сложной на вид: найти такую функцию $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$, чтобы каждое уравнение системы (17) было следствием уравнения (15).

Ясно, что всякая функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$, удовлетворяющая системе (17) независимо от того, соблюдено или нет уравнение (15), т. е. тогда, когда z трактуется как независимое переменное, даст возможность найти решение системы (9); составив при помощи ее уравнение (15), мы получим, именно, уравнение, решение z которого удовлетворяет системе (9). Но следует думать, что, ограничиваясь при решении системы (9) теми уравнениями (15), в которых функция V найдена решением системы (17), мы не найдем всех решений системы (9).

Мы назовем те решения системы (9), которые могут быть найдены при помощи описанного процесса, обыкновенными решениями системы (9), давая тем решениям, которые при этом процессе могут ускользнуть, имя *особенных решений.*

Мы посвятим нахождению особенных решений отдельный параграф. Пока же укажем одно свойство обыкновенных решений.

Если $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ удовлетворяет системе (17), то ей удовлетворяет и функция

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = a,$$

где a произвольное постоянное. Значит z, найденное из уравнения

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = a, \tag{15_1}$$

в котором a есть произвольное постоянное, есть решение системы (9), и то решение, о котором говорилось раньше, получается из него заменой a нулем. Значит, всякое неособенное решение принадлежит семейству решений, зависящих от произвольного параметра a и получается заменою этого параметра нулем.

Обратное также справедливо. Если некоторое решение принадлежит семейству решений, зависящих от параметра a, то оно есть решение обыкновенное.

Действительно, положим, что

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) \tag{18}$$

при произвольном a удовлетворяет системе (9) и при $a = 0$ обращается в данное решение этой системы. Решив уравнение (18) относительно a, мы получим уравнение

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = a, \tag{15_1}$$

которому удовлетворяет (18) и при a, равном нулю, данное решение. Составляя при помощи (15_1) сначала выражения (16), а затем уравнения (17), мы получим систему уравнений, явно от a не зависящих, но которые все обращаются в тожества после подстановки в них значения z, найденного из уравнения (15_1), т. е. функции (18). Но тогда каждое из уравнений (17) должно быть тожеством и до исключения z: если оно тожество как функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и a, то оно останется тожеством и после обратного введения z путем исключения a при помощи уравнения (15_1); но подстановка в (18) на место a его значения (15_1) обращает (18) в тожество.

43. Замкнутость системы, дающей не особенные решения. Приступая к доказательству теоремы, по которой система (17) замкнутая, рассмотрим сначала, в виде вспомогательной теоремы, более общую задачу.

Положим, что даны две функции

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, z), \quad F(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, z). \tag{19}$$

Обозначая производные от функции V прошлого параграфа через

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, q,$$

т. е. положив

$$q_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ \ldots, \ q_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}, \ q = \frac{\partial V}{\partial z},$$

мы можем зависимостям (16) дать вид

$$p_1 = -\frac{q_1}{q}, \; \ldots, \; p_n = -\frac{q_n}{q}. \tag{20}$$

Условимся временно обозначать через (f) результат замены в функции f аргументов $p_1, \ldots, p_n$ их выражениями (20), т. е. писать, например,

$$\left.\begin{aligned} (f) &= f\left(-\frac{q_1}{q}, \; -\frac{q_2}{q}, \; \ldots, \; -\frac{q_n}{q}, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; z\right) \\ (F) &= F\left(-\frac{q_1}{q}, \; -\frac{q_2}{q}, \; \ldots, \; -\frac{q_n}{q}, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; z\right) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и найдем зависимость между скобками

$$[f, F], \quad ((f), (F))$$

Якоби и Пуассона, считая в функциях (f) и (F) независимыми переменными не только $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но и z.

Так как

$$\frac{\partial(f)}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\left(-\frac{1}{q}\right), \quad \frac{\partial(f)}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right), \quad \frac{\partial(f)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial(f)}{\partial q} = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{q_1}{q^2} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)\frac{q_n}{q^2} =$$

$$= -\frac{1}{q}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)(p_1) + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)(p_n)\right\};$$

имеем

$$((f), (F)) = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial(f)}{\partial q_k}\frac{\partial(F)}{\partial x_k} - \frac{\partial(F)}{\partial q_k}\frac{\partial(f)}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ \frac{\partial(f)}{\partial q}\frac{\partial(F)}{\partial z} - \frac{\partial(F)}{\partial q}\frac{\partial(f)}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right) -$$

$$- \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{k=n}\left((p_k)\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) - (p_k)\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) + (p_k)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + \right.$$

$$\left. + (p_k)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] = -\frac{1}{q}([f, F]).$$

Итак

$$((f), (F)) = -\frac{1}{q}([f, F]). \tag{22}$$

Это и есть та зависимость, которую мы имели в виду.

Переходя к доказательству замкнутости системы (17), замечаем, что при наших новых обозначениях эта система имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = X_1^{(1)} q_1 + X_1^{(2)} q_2 + \ldots + X_1^{(n)} q_n + X_1^{(0)} q = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_m = X_m^{(1)} q_1 + X_m^{(2)} q_2 + \ldots + X_m^{(n)} q_n + X_m^{(0)} q = 0 \end{array}\right\} \tag{17'}$$

причем по способу получения ее уравнений, так как

$$(X_i) = -X_i^{(1)} \frac{q_1}{q} - X_i^{(2)} \frac{q_2}{q} - \ldots - X_i^{(n)} \frac{q_n}{q} - X_i^{(0)},$$

имеем

$$Y_i = -q(X_i). \tag{23}$$

Из (23) заключаем, пользуясь свойствами скобок Пуассона, что

$$\begin{aligned} (Y_i, Y_j) &= (q(X_i), q(X_j)) = \\ &= q^2((X_i), (X_j)) + q(X_i)\frac{\partial (X_j)}{\partial z} - q(X_j)\frac{\partial (X_i)}{\partial z}, \end{aligned} \tag{24}$$

так как, например

$$\begin{aligned} (q(X_i), q(X_j)) &= q((X_i), q(X_j)) + (X_i)(q, q(X_j)) = \\ &= q((X_i), q(X_j)) + (X_i)\frac{\partial q(X_j)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Вследствие этого, по формуле (22) получаем:

$$(Y_i, Y_j) = -q([X_i, X_j]) + Aq(X_i) + Bq(X_j),$$

обозначая буквами A и B не имеющие значения коэффициенты в равенстве (24).

Если система (9) замкнутая, то

$$[X_i, X_j] = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_m X_m,$$

где коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_m$ зависят от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ и от $p_1, p_2, \ldots, p_n$ [1]).

Значит, в этом случае

$$\begin{aligned} (Y_i, Y_j) &= -q[(C_1)(X_1) + (C_2)(X_2) + \ldots + (C_m)(X_m)] + \\ &+ Aq(X_i) + Bq(X_j) = (C_1)Y_1 + (C_2)Y_2 + \ldots + (C_m)Y_m - AY_i - BY_j, \end{aligned}$$

откуда ясно, что система (17′) замкнута.

---

[1]) Из сказанного в § 39 ясно, что только коэффициенты C_i и C_j зависят от $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Примечание. После приведения подобных членов в правой части последнего равенства, конечно, получается функция, в которой коэффициенты при

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \tag{25}$$

не зависят от

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, q.$$

Так как выведенные формулы могут быть прочитаны и справа налево, ясно, что из замкнутости системы (17′) можно сделать заключение и о замкнутости системы (9). Вследствие этого, так как обращение со скобками Пуассона проще, чем со скобками Якоби, можно при решении вопроса о замкнутости системы (9) выбирать следующий путь: преобразовывать систему (9) сначала в систему (17′) и затем изучать скобки Пуассона, составленные при помощи функций (25).

При этом, однако, надо соблюдать некоторые предосторожности, чтобы не потерять возможностей, отмеченных в пункте (II, 2) § 40.

Если система (17′) не замкнутая, то в результате изучения скобок Пуассона к ней должны быть присоединены новые уравнения.

Но по смыслу задачи, к системе (17′) нельзя присоединять уравнения, из которого при помощи остальных уравнений вытекало бы уравнение

$$q = 0,$$

так как функция V, удовлетворяющая системе (17′), должна зависеть от z: иначе из уравнения

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 \tag{15}$$

нельзя было бы найти z.

Значит, если в ходе процесса обнаружится уравнение вида

$$q\,\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

то из него нужно сделать заключение, что не q равно нулю, а справедливо равенство

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

которое приводит к тем же заключениям, которые были сделаны в § 40.

Пример. Проинтегрировать систему

$$f = p_1 - p_3 - z = 0, \quad F = p_2 - p_3 - z - x_3 = 0. \tag{26}$$

Составляя скобки Якоби, имеем

$$[f, F] = 1\cdot(-p_1) - 1\cdot(-1 - p_3) - 1\cdot(-p_2) + 1\cdot(-p_3) =$$
$$= -p_1 + p_2 + 1 = -p_3 - z + p_3 + z + x_3 + 1 = 1 + x_3.$$

Последний результат говорит, что система решений не имеет. Заменяя систему (26) системой

$$\bar{f} = q_1 - q_3 + zq = 0, \quad \bar{F} = q_2 - q_3 + (z + x_3)\,q = 0$$

и составляя скобку Пуассона, находим:

$$(\overline{f,F})=1\cdot 0-1\cdot q+zq-1\cdot 0+1\cdot 0-(z+x_3)q=-q(1+x_3)$$

так как $q\neq 0$, имеем

$$1+x_3=0;$$

т. е. система решений не имеет.

44. Интегрирование замкнутой системы. Установив замкнутость системы (17), мы получаем возможность приложить к интегрированию системы (9) все сказанное об интегрировании однородных систем.

Во-первых, так как система (17) из m уравнений зависит от $n+1$ независимых переменных, она допускает $n+1-m$ алгебраически независимых решений.

Если

$$V_{m+1}, V_{m+2}, \ldots, V_n, V_0 \tag{27}$$

эти решения, то

$$\omega(V_{m+1}, V_{m+2}, \ldots, V_n, V_0),$$

где ω произвольная функция от ее аргументов, есть самое общее решение системы (17), а самое общее решение системы (9) мы найдем, отыскивая z из уравнения

$$\omega(V_{m+1}, V_{m+2}, \ldots, V_n, V_0)=0. \tag{28}$$

Во-вторых из сказанного ясно, что, интегрируя систему (9), можно поставить следующую задачу Коши.

Даны числа:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$$

и функция

$$\vartheta(x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Найти то решение системы (9), в котором при

$$x_1=x_1^{(0)}, x_2=x_2^{(0)}, \ldots, x_m=x_m^{(0)}:\ \ z=\vartheta(x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Ясно, что для получения искомого решения надо искать то решение системы (17), в котором при

$$x_1=x_1^{(0)}, x_2=x_2^{(0)}, \ldots, x_m=x_m^{(0)}:\ \ V=z-\vartheta(x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Для этого надо искать главные решения системы (17), т. е. те ее решения, которые, когда

$$x_1=x_1^{(0)},\ x_2=x_2^{(0)}, \ldots, x_m=x_m^{(0)},$$

обращаются соответственно в $x_{m+1}, \ldots, x_n, z$.

Если (27) именно эти решения, то функция z находится из уравнения

$$V_0-\vartheta(V_{m+1}, \ldots, V_n)=0.$$

При нахождении решений (27) можно, конечно, пользоваться каждой из указанных двух метод: методой Якоби или методой Коши.

Заметим, что все сказанное в § 31 должно быть принято во внимание при интегрировании системы (17); но более, так как в действительности интегрируется система (9), то могут обнаружиться и обстоятельства, аналогичные тем, о которых говорилось в § 16. Для того, чтобы система (17) имела искомое голоморфное решение, достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} X_1^{(1)}, \ldots, X_1^{(m)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_m^{(1)}, \ldots, X_m^{(m)} \end{vmatrix} \tag{29}$$

не обращался тожественно в нуль после замены $x_1, \ldots, x_m$ их начальными значениями.

Если это условие соблюдено, то можно выбрать начальные значения $x_{m+1}, \ldots, x_n, z$ так, чтобы начальное значение определителя не было равно нулю; но когда интегрируется система (9), можно произвольно выбирать только начальные значения аргументов $x_{m+1}, \ldots, x_n$; начальное же значение аргумента z определено равенством:

$$z = \vartheta\,(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n).$$

Следовательно, если определитель

$$\begin{vmatrix} (X_1^{(1)}), \ldots, (X_1^{(m)}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (X_m^{(1)}), \ldots, (X_m^{(m)}) \end{vmatrix} \tag{29_1}$$

получаемый из (29) заменою аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ их начальными значениями, обращается в нуль после замены z через ϑ, мы не можем утверждать, что система имеет голоморфное решение, удовлетворяющее поставленным условиям.

Можно даже, исключая из системы (9) значения производных $p_1, p_2, \ldots, p_m$ при начальных значениях аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, составить условия, аналогичные условиям § 18, связывающие выбор функции ϑ, без соблюдения которых система (9) наверное не имеет голоморфного решения, если вообще она имеет некоторое решение.

Возможность появления подобных обстоятельств достаточно разъяснена в § 18, посвященном задаче, являющейся только частным случаем трактуемой теперь. Заметим только, что теперь дело значительно усложняется; если все миноры определителя (29_1) также обращаются в нуль, то ϑ может быты связана несколькими зависимостями. Мы осветим эти обстоятельства в следующем параграфе. Теперь же заметим, что когда каким-нибудь образом найдены алгебраически независимые решения (27) системы (17) и составлено самое общее решение (28) системы (9), индивидуальное изучение уравнения (28) может привести к нахождению решения, удовлетворяющего поставленным условиям и в том случае, когда не все благополучно обстоит с определителем (29); мы только не можем еще сказать ничего определенного о существовании такого решения и об его аналитическом характере.

Пример. Проинтегрировать систему:

$$2p_1=(x_3+z)(p_3-1),\quad 2p_2=(x_3-z)(p_3+1).$$

Переписав систему в виде:

$$2p_1-(x_3+z)p_3+(x_3+z)=0,\ 2p_2-(x_3-z)p_3-(x_3-z)=0,$$

преобразуем ее в однородную:

$$f_1=2q_1-(x_3+z)q_3-(x_3+z)q=0,\quad F=2q_2-(x_3-z)q_3+ \\ +(x_3-z)q=0.$$

Составляя скобки Пуассона:

$$(f,F)=2\cdot 0-(x_3+z)(-q_3+q)-(x_3+z)(q_3-q)-2\cdot 0+ \\ +(x_3-z)(-q_3-q)-(x_3-z)(-q_3-q),$$

убеждаемся, что система замкнута.

Чтобы найти ее главные решения, соответствующие

$$x_1=0,\quad x_2=0,$$

ищем соответственные главные решения второго уравнения. Интегрируя систему:

$$\frac{dx_2}{2}=\frac{dx_3}{-(x_3-z)}=\frac{dz}{x_3-z},$$

находим интегралы

$$x_3+z=x_3^{(0)}+z^{(0)},\ e^{x_2}(x_3-z)=x_3^{(0)}-z^{(0)},$$

откуда заключаем, что искомые главные решения:

$$\frac{1}{2}[x_3+z+e^{x_2}(x_3-z)],\quad \frac{1}{2}[x_3+z-e^{x_2}(x_3-z)]. \tag{30}$$

Остается найти решения первого уравнения, обращающиеся при $x_1=0$ в функции (30).

Система, соответствующая первому уравнению

$$\frac{dx_1}{2}=\frac{dx_2}{0}=\frac{dx_3}{-(x_3+z)}=\frac{dz}{-(x_3+z)},$$

имеет интегралы:

$$x_2=x_2^{(0)},\ x_3-z=x_3^{(0)}-z^{(0)},\ e^{x_1}(x_3+z)=x_3^{(0)}+z^{(0)}.$$

Следовательно искомые решения системы получаются из (30) заменою в них x_2, x_3, z соответственно через

$$x_2,\ \frac{1}{2}[x_3-z+e^{x_1}(x_3+z)],\ \frac{1}{2}[e^{x_1}(x_3+z)-(x_3-z)].$$

Искомые решения

$$\frac{1}{2}\,[e^{x_1}(x_3+z)+e^{x_2}(x_3-z)],\quad \frac{1}{2}\,[e^{x_1}(x_3+z)-e^{x_2}(x_3-z)].$$

Самое общее решение системы найдем, решая уравнение:

$$\omega\,[e^{x_1}(x_3+z)+e^{x_2}(x_3-z),\quad e^{x_1}(x_3+z)-e^{x_2}(x_3-z)]=0,$$

в котором ω — произвольная функция.

Решение, обращающееся в $\vartheta(x_3)$ при $x_1=x_2=0$ найдем, решая уравнение:

$$\frac{1}{2}\,[e^{x_1}(x_3+z)-e^{x_2}(x_3-z)]-$$
$$-\vartheta\left[\frac{1}{2}\,\{e^{x_1}(x_3+z)+e^{x_2}\,(x_3-z)\}\right]=0.$$

45. Особые случаи задачи Коши. Рассмотрим теперь случаи задачи Коши, в которых, основываясь на сказанном до сих пор, мы не можем утверждать, что задача имеет решение. Мы встретились с такими случаями в § 31 и отложили там исследования до разработки приемов интегрирования неоднородного уравнения; в прошлом параграфе мы снова подошли к указанным случаям.

Занимаясь системой

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}p_1+X_1^{(2)}p_2+\ldots+X_1^{(n)}p_n-X_1^{(0)}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X_m^{(1)}p_1+X_m^{(2)}p_2+\ldots+X_m^{(n)}p_n-X_m^{(0)}=0 \end{array}\right\}\qquad(9)$$

мы можем считать, не нарушая общности исследования, что имеем дело со следующей задачей Коши. Найти то решение системы (9), в котором при

$$x_1=0,\ldots,\ x_m=0:z=0.\qquad(31)$$

Действительно, если бы отыскивалось то решение, в котором при

$$x_1=\vartheta_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots,x_m=\vartheta_m(x_{m+1},\ldots,x_n):z=\theta(x_{m+1},\ldots,x_n),$$

мы свели бы его нахождение к задаче, определенной условиями (31), положив

$$x_1-\vartheta_1(x_{m+1},\ldots,x_n)=\xi_1\ldots,\ x_m-\vartheta_m(x_{m+1},\ldots,x_n)=\xi_m,$$
$$z-\theta(x_{m+1},\ldots,x_n)=u$$

и трактуя $\xi_1,\ldots,\ \xi_m,\ u$ как новые независимые переменные и новую неизвестную функцию.

Положим, имея дело с какой-нибудь функцией

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n,z)$$

от $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и z, что

$$(f)=f(0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_n,0).$$

Если определитель

$$\begin{vmatrix} (X_1^{(1)}), \ldots, (X_1^{(m)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (X_m^{(1)}), \ldots, (X_m^{(m)}) \end{vmatrix} \tag{29_1}$$

не равен нулю, то, как выяснено в прошлом параграфе, мы умеем находить искомое решение и находим для него единственное значение.

Если же определитель (29_1) равен нулю тожественно, то существование голоморфного решения возможно только при соблюдении одного или нескольких условий.

В случае задания (31) мы получим эти условия, исключая $(p_1), \ldots, (p_m)$ из уравнений

$$\begin{gathered} (X_1^{(1)})(p_1) + \ldots + (X_1^{(m)})(p_m) = (X_1^{(0)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (X_m^{(1)})(p_1) + \ldots + (X_m^{(m)})(p_m) = (X_m^{(0)}) \end{gathered}$$

так как в случае задания (31):

$$(p_j) = 0, \quad \text{если} \quad j > m.$$

Мы будем предполагать, что эти условия соблюдены.

Положим, что минор порядка s определителя (29_1):

$$\begin{vmatrix} (X_1^{(1)}), \ldots, (X_1^{(s)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (X_s^{(1)}), \ldots, (X_s^{(s)}) \end{vmatrix} \tag{32}$$

не равен нулю, но что все его миноры порядка $s+1$ равны нулю. Предположим еще, что один из определителей порядка m таблицы

$$\begin{Vmatrix} (X_1^{(1)}), \ldots, (X_1^{(n)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (X_m^{(1)}), \ldots, (X_m^{(n)}) \end{Vmatrix}$$

заключающий определитель (32), например определитель

$$\begin{vmatrix} (X_1^{(1)}), \ldots, (X_1^{(s)}), (X_1^{(m+1)}), \ldots, (X_1^{(2m-s)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (X_m^{(1)}), \ldots, (X_m^{(s)}), (X_m^{(m+1)}), \ldots, (X_m^{(2m-s)}) \end{vmatrix} \tag{33}$$

не равен нулю.

Если бы это второе предположение не было соблюдено, то можно было бы составить уравнение, в котором начальные значения всех коэффициентов были бы равны нулю и мы имели бы дело со случаем, аналогичным исключенному нами из рассмотрения в § 18.

Обратим теперь систему (9) в систему

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}q_1 + X_1^{(2)}q_2 + \ldots + X_1^{(n)}q_n + X_1^{(0)}q = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m^{(1)}q_1 + X_m^{(2)}q_2 + \ldots + X_m^{(n)}q_n + X_m^{(0)}q = 0 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

однородных уравнений, обозначая буквами q_i производные от функции V. Поставленная нами задача Коши обращается для системы (17) в задачу: найти то решение системы (17), в котором

$$\text{при } x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$$

V равна функции, обращающейся в нуль при $z = 0$.

Соответственно предположениям, сделанным об определителе (33), система (17) может быть решена относительно производных

$$q_1, q_2, \ldots, q_s, q_{m+1}, \ldots, q_{2m-s}$$

и преобразована в нормальную систему:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 + b_1^{(s+1)}q_{s+1} + \ldots + b_1^{(m)}q_m + b_1^{(2m-s+1)}q_{2m-s+1} + \\ \qquad + \ldots + b_1^{(n)}q_n + b_1^{(0)}q = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_s + b_s^{(s+1)}q_{s+1} + \ldots + b_s^{(m)}q_m + b_s^{(2m-s+1)}q_{2m-s+1} + \\ \qquad + \ldots + b_s^{(n)}q_n + b_s^{(0)}q = 0 \\ q_{m+1} + b_{m+1}^{(s+1)}q_{s+1} + \ldots + b_{m+1}^{(m)}q_m + b_{m+1}^{(2m-s+1)}q_{2m-s+1} + \\ \qquad + \ldots + b_{m+1}^{(n)}q_n + b_{m+1}^{(0)}q = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{2m-s} + b_{2m-s}^{(s+1)}q_{s+1} + \ldots + b_{2m-s}^{(m)}q_m + b_{2m-s}^{(2m-s+1)}q_{2m-s+1} + \\ \qquad + \ldots + b_{2m-s}^{(n)}q_n + b_{2m-s}^{(0)}q = 0. \end{array}\right\} \qquad (34)$$

При всем этом все коэффициенты b остаются голоморфными вблизи точки

$$x_1 = 0, \ldots, x_m = 0, \ x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}, \ z = 0,$$

если числа $x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ выбраны подобающим образом, и справедливы тожества

$$(b_k^{(i)}) \equiv 0, \ i = s+1, \ldots, m, 0, \ k = m+1, \ldots, 2m-s. \qquad (35)$$

Если бы $(b_k^{(0)})$ были отличны от нуля, замена в последних $m-s$ уравнениях (34) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и z нулями приводила бы к противоречию.

К интегрированию системы (34) применяем методу Коши, данную в § 34.

Положим

$$\omega\,(x_{s+1},\ldots,x_m,\ x_{2m-s+1},\ldots,x_n) \tag{36}$$

произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\omega\,(0,\ldots,0,\ x_{2m-s+1},\ldots,x_n) \equiv 0 \tag{36_1}$$

и ищем сначала решение системы по условию: если

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0,\ldots,x_s=0,\ x_{m+1}=x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_{2m-s}=x_{2m-s}^{(0)}, \\ \text{то} \\ V=z+\omega\,(x_{s+1},\ldots,x_m,\ x_{2m-s+1},\ldots,x_n). \end{array}\right\} \tag{37}$$

Прилагая методу § 34, мы прежде всего должны найти то решение системы

$$\left.\begin{array}{l} q_{m+1}+(b_{m+1}^{(s+1)})_s\,q_{s+1}+\ldots+(b_{m+1}^{(m)})_s\,q_m+ \\ +(b_{m+1}^{(2m-s+1)})_s q_{2m-s+1}+\ldots+(b_{m+1}^{(n)})_s\,q_n+(b_{m+1}^{(0)})_s\,q=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{2m-s}+(b_{2m-s}^{(s+1)})_s\,q_{s+1}+\ldots+(b_{2m-s}^{(m)})_s\,q_m+ \\ +(b_{2m-s}^{(2m-s+1)})_s\,q_{2m-s+1}+\ldots+(b_{2m-s}^{(n)})_s\,q_n+(b_{2m-s}^{(0)})_s q=0, \end{array}\right\} \tag{38}$$

в котором если $x_{m+1}=x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_{2m-s}=x_{2m-s}^{(0)}$, то

$$V=z+\omega(x_{s+1},\ldots,x_m,\ x_{2m-s+1},\ldots,x_n). \tag{37_1}$$

В уравнениях (38) знак $(b)_s$ обозначает результат замены аргументов $x_1,\ x_2,\ldots,x_s$ нулями.

Положим, что

$$(V)_s=\varphi\,(x_{s+1},\ldots,x_m,x_{s+1},\ldots,x_{2m-s},\ x_{2m-s+1},\ldots,x_n,\ z) \tag{39}$$

найденное решение системы (36); в нем, по условию,

$$\begin{aligned} &\varphi\,(x_{s+1},\ldots,x_m,\ x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_{2m-s}^{(0)},\ x_{2m-s+1},\ldots,x_n,z)\equiv \\ &\equiv z+\omega(x_{s+1},\ldots,x_m,x_{2m-s+1},\ldots,x_n). \end{aligned} \tag{40}$$

Обозначая временно через (φ) результат замены в функции (39) аргументов $z,\ x_{s+1},\ldots,x_m$ нулями, докажем прежде всего, что

$$(\varphi)\equiv 0. \tag{41}$$

Действительно, заменяя в (38) аргументы $x_{s+1},\ldots,x_m,\ z$ нулями и пользуясь тожествами (35), видим, что функция (41) удовлетворяет системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} q_{m+1}+(b_{m+1}^{(2m-s+1)})q_{2m-s+1}+\ldots+(b_{m+1}^{(n)})q_n\ =0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{2m-s}+(b_{2m-s}^{(2m-s+1)})q_{2m-s+1}+\ldots+(b_{2m-s}^{(n)})\,q_n=0; \end{array}\right\} \tag{42}$$

при этом, вследствие (36_1) и (40) по замене $x_{m+1}, \ldots, x_{2m-s}$ их начальными значениями, она обращается тожественно в нуль.

Но система (42) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям:

$$\text{если } x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_{2m-s} = x_{2m-s}^{(0)}, \quad \text{то } (\varphi) = 0$$

и это решение

$$(\varphi) \equiv 0.$$

Для окончательного интегрирования системы (34) остается найти то решение системы из первых s уравнений (34), в котором при $x_1 = 0, \ldots, x_s = 0$: $V = \varphi(x_{s+1}, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-s}, x_{2m-s+1}, \ldots, x_n, z)$.

Положим, что

$$V = \psi(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-s}, x_{2m-s+1}, \ldots, x_n, z) \quad (43)$$

это решение.

По замене:

$$x_1 = 0, \ldots, x_s = 0$$

функция (43) обращается в (39); эта последняя, если в ней положить

$$x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_{2m-s} = x_{2m-s}^{(0)},$$

обращается в

$$z + \omega(x_{s+1}, \ldots, x_m, x_{2m-s+1}, \ldots, x_n),$$

откуда ясно, что V зависит от произвольной функции; $(V)_s$ имеет вид

$$(V)_s = z + \omega(x_{s+1}, \ldots, x_m, x_{2m-s+1}, \ldots, x_n) +$$
$$+ \vartheta(x_{s+1}, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots x_{2m-s}, \ldots, x_n, z),$$

где

$$\vartheta(x_{s+1}, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_{2m-s}^{(0)}, x_{2m-s+1}, \ldots x_n, z) \equiv 0,$$

а также, по доказанному выше,

$$\vartheta(0, \ldots 0, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-s}, x_{2m-s+1}, \ldots, x_n, 0) \equiv 0.$$

Значит при

$$x_1 = 0, \ldots, x_s = 0, \ x_{s+1} = 0, \ldots, x_m = 0$$

мы имеем

$$\psi(0, \ldots 0, 0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-s}, x_{2m-s+1}, \ldots, x_n, z) =$$
$$= z + \vartheta(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-s}, x_{2m-s+1}, \ldots, x_n, z),$$

причем эта функция обращается в нуль при $z = 0$.

Из сказанного вытекает справедливость нашего утверждения о множественности решений у задачи Коши в рассматриваемом случае.

46. Характеристическое многообразие. Если

$$V_{m+1},\ V_{m+2}, \ldots, V_n,\ V_0 \tag{27}$$

алгебраически независимые решения системы (17), то по сказанному в § 33 уравнения

$$V_{m+1} = b_{m+1},\ V_{m+2} = b_{m+2}, \ldots, V_n = b_n,\ V_0 = b \tag{44}$$

вместе с уравнением

$$V = c \tag{45}$$

определяют характеристическое многообразие системы (17).

Измерение многообразия (44), (45) равно m, и оно зависит от $n-m+2$ параметров.

Обобщая сказанное в § 15, мы можем сказать, что уравнения (44) определяют характеристическое многообразие системы (9); эти уравнения определяют в пространстве $n+1$ измерений многообразие измерения m, зависящее от $n-m+1$ параметров.

Так как неособенное решение системы (9) дается равенством:

$$V_0 = \omega(V_{m+1}, \ldots, V_n), \tag{46}$$

мы получаем из характеристических многообразий системы характеристические многообразные решения, связав параметры $b_{m+1}, \ldots, b_n$, b одной зависимостью

$$b = \omega(b_{m+1}, \ldots, b_n)$$

или, выразив их через новые $m-n$ параметров; характеристические многообразия решений системы (9) зависят от $m-n$ параметров, а сами решения получаются исключением этих параметров.

Заметим, однако, что уравнение (46) должно давать возможность найти z как функцию от остальных переменных; значит значения параметров $b_{m+1}, \ldots, b_n$, b как функции от новых $n-m$ параметров должны быть таковы, чтобы исключение этих последних не приводило вместе с этим к исключению z; при несоблюдении этого условия мы не получим многообразия, принадлежащего решению.

Пример. Если функции $V_{m+1}, \ldots, V_n$ не зависят от z, то нельзя строить характеристического многообразия решений системы (9), задавая $b_{m+1}, \ldots, b_n$ как функции от $n-m-1$ параметров и выбирая b за параметр с нумером $n-m$.

Описанный в § 44 процесс решения задачи Коши, определенной условиями:

$$\text{если}\quad x_1 = \overset{0}{x_1}, \ldots, x_n = x_m^{(0)},\ \text{то}\ z = \vartheta(x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

равносилен, как мы имели случай выяснить в § 33, следующему: из системы многообразий (44), зависящих от $n-m+1$ параметров, выделяем группу проходящих через точки

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \vartheta(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})).$$

Полученное многообразие, зависящее от $n-m$ параметров

$$x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \tag{47}$$

будет, вообще говоря, характеристическим многообразием решения, а самое решение получится исключением параметров (47), т. е. будет геометрическим местом найденных характеристических многообразий.

Если функции (27) являются главными решениями системы (17), соответствующими начальным значениям $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ аргументов $x_1, \ldots, x_m$, причем V_0 обращается в z по замене этих аргументов их начальными значениями, то характеристические многообразия этого решения получаются при предположении

$$b_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, b_n = x_n^{(0)}, \quad b = \vartheta(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)});$$

самое решение — их геометрическое место.

Ясно, как надо видоизменять процесс при решении общей задачи Коши.

47. Нахождение особенных решений. В заключение укажем, какие решения, названные нами особенными, были исключены в § 42.

Положим

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{48}$$

некоторое решение системы (9).

Обозначая знаком (f) результат подстановки в функцию $f(x_1, x_2, \ldots x_n, z)$ вместо z его значения (48), составим таблицу из значений коэффициентов системы (9):

$$\left\| \begin{matrix} (X_1^{(1)}), (X_1^{(2)}), \ldots, (X_1^{(n)}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (X_m^{(1)}), (X_m^{(2)}), \ldots, (X_m^{(n)}) \end{matrix} \right\| \tag{49}$$

Положим далее, что

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$$

некоторые начальные значения соответственных аргументов; найдем

$$z_0 = \varphi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

и примем во внимание точку

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z_0). \tag{50}$$

Теорема. *Если один из определителей порядка m таблицы* (44) *не равен нулю* [1]) *и если есть точка* (50) *на решение* (48), *вблизи которой все* $(n+1)m$ *коэффициентов системы* (9) *голоморфны, то решение* (48) *можно найти по правилам* § 42 *интегрированием системы* (17), *другими словами, решение* (48) *неособенное.*

Из этой теоремы вытекает, что решение (48) может быть особенным, если соблюдено одно из двух условий: или 1) все определители порядка m таблицы (49) равны нулю; или 2) в каждой точке (50) на решении (48) один из коэффициентов системы перестает быть голоморфным.

Внимательное изучение коэффициентов системы может повести таким образом к нахождению особенных решений, подходящих под пункт (2).

Для нахождения решений, подходящих под пункт (1), надо приравнять нулю все определители порядка m таблицы:

$$\left\| \begin{matrix} X_1^{(1)}, & X_1^{(2)}, & \ldots, & X_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_m^{(1)}, & X_m^{(2)}, & \ldots, & X_m^{(n)} \end{matrix} \right\| \tag{49'}$$

Найдя некоторую функцию z, удовлетворяющую условиям (1) или (2), надо проверить непосредственной подстановкой в систему (9), образует ли она решение системы или нет.

Приступая к доказательству теоремы, положим, что определитель из первых m столбцов таблицы (49) не равен нулю. Решив уравнения (9) относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$, мы преобразуем систему (9) в систему

$$\left.\begin{matrix} p_1 + a_1^{(m+1)} p_{m+1} + a_1^{(m+2)} p_{m+2} + \ldots + a_1^{(n)} p_n - a_1^{(0)} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_m + a_m^{(m+1)} p_{m+1} + a_m^{(m+2)} p_{m+2} + \ldots + a_m^{(n)} p_n - a_m^{(0)} = 0 \end{matrix}\right\} \tag{9'}$$

коэффициенты которой голоморфные функции вблизи точки (50); при составлении этих коэффициентов приходится именно делить

---

[1]) Если есть определитель порядка r таблицы

$$\left\| \begin{matrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \ldots, & a_1^{(r)}, & \ldots, & a_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_r^{(1)}, & a_r^{(2)}, & \ldots, & a_r^{(r)}, & \ldots, & a_r^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^{(1)}, & a_m^{(2)}, & \ldots, & a_m^{(r)}, & \ldots, & a_m^{(n)} \end{matrix} \right\|$$

не равный нулю, но все определители порядка $r+1$ равны нулю, то говорят, что *ранг таблицы равен* r. Первое условие теоремы можно поэтому высказать так: *если ранг таблицы* (49) *равен* m.

только на определитель из первых m столбцов таблицы (49′), который не обращается по предположению в нуль по замене z его значением (48); можно даже считать, что он не нуль в точке (50).

Соответственно этому система (17) окажется замененной системой

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial x_1}+a_1^{(m+1)}\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}+a_1^{(m+2)}\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}+\ldots+a_1^{(n)}\dfrac{\partial V}{\partial x_n}+a_1^{(0)}\dfrac{\partial V}{\partial z}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial V}{\partial x_m}+a_m^{(m+1)}\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}+a_m^{(m+2)}\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}+\ldots+a_m^{(n)}\dfrac{\partial V}{\partial x_n}+a_m^{(0)}\dfrac{\partial V}{\partial z}=0,\end{array}\right\}\qquad(17')$$

которая замкнута, так как система (9′) по предположению замкнута. Дав переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$ начальные значения $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$, ищем главные решения системы (17′). Положим

$$u_{m+1},\ u_{m+2},\ \ldots,\ u_n,\ u_0 \qquad (51)$$

эти решения; мы имеем

$$\left.\begin{array}{l}\text{при}\quad x_1=x_1^{(0)},\ x_2=x_2^{(0)},\ldots,\ x_m=x_m^{(0)}\\ u_{m+1}=x_{m+1},\ u_{m+2}=x_{m+2},\ldots,\ u_n=x_n,\ u_0=z\end{array}\right\}\qquad(52)$$

Всякое решение системы (17′) есть функция этих решений; значит неособенные решения системы (9′) можно найти, выбирая подобающим образом функцию

$$V(u_{m+1},\ u_{m+2},\ldots,u_n,\ u_0)$$

и решая уравнение

$$V(u_{m+1},\ u_{m+2},\ldots,u_n,\ u_0)=0. \qquad (53)$$

Нам надо доказать, что при некотором выборе функции V функция (48) есть решение уравнения (53), т. е. что тожественно справедливо равенство

$$V((u_{m+1}),(u_{m+2}),\ldots,(u_n),\ (u_0))\equiv 0. \qquad (54)$$

Последнее будет иметь место, если все определители порядка $n-m+1$ таблицы:

$$\left\|\begin{array}{llll}\dfrac{\partial(u_{m+1})}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial(u_{m+1})}{\partial x_m}, & \dfrac{\partial(u_{m+1})}{\partial x_{m+1}},\ldots,\dfrac{\partial(u_{m+1})}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial(u_n)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial(u_n)}{\partial x_m}, & \dfrac{\partial(u_n)}{\partial x_{m+1}},\ldots,\dfrac{\partial(u_n)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial(u_0)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial(a_0)}{\partial x_m}, & \dfrac{\partial(u_0)}{\partial x_{m+1}},\ldots,\dfrac{\partial(u_0)}{\partial x_n}\end{array}\right\| \qquad (55)$$

равны нулю; таково, именно, условие, что функции

$$(u_{m+1}),\ (u_{m+2}),\ldots,(u_n),\ (u_0) \tag{56}$$

связаны зависимостью между собою.

Замечая, что

$$\frac{\partial(u)}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+p_i\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

где p_i производная по x_i от функции (48), мы перепишем эту таблицу так:

$$\left|\begin{matrix} \left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_1}\right)+p_1\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial z}\right),\ldots,\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_{m+1}}\right)+p_{m+1}\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial z}\right),\ldots,\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_n}\right)+p_n\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial z}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)+p_1\left(\frac{\partial u_n}{\partial z}\right),\ldots,\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_{m+1}}\right)+p_{m+1}\left(\frac{\partial u_n}{\partial z}\right),\ldots,\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)+p_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\right)+p_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right),\ldots,\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_{m+1}}\right)+p_{m+1}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right),\ldots,\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_n}\right)+p_n\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right) \end{matrix}\right| \tag{57}$$

Заметим, что определитель порядка $n-m$ таблицы, составленной из первых $n-m$ строк и последних $n-m$ столбцов, не равен нулю.

При $x_1=x_1^{(0)},\ldots,x_m=x_m^{(0)}$ все его элементы, именно, вследствие (52) обращаются в нуль, кроме элементов, занимающих главную диагональ, которые все обращаются в единицу; определитель обращается в единицу.

Значит, по известной теореме Кронекера [1]), для того, чтобы можно было утверждать, что все определители порядка $n-m+1$ таблицы равны нулю, достаточно убедиться, что равны нулю все определители, заключающие этот определитель порядка $n-m$.

Докажем, что равен нулю определитель, содержащий первый

---

[1]) Мы дадим следующее доказательство этой теоремы, приноровленное к рассматриваемому случаю. Положим, что в таблице

$$\left\|\begin{matrix} a_1^{(1)},\ldots,a_1^{(k)}, & a_1^{(k+1)},\ldots a_1^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_k^{(1)},\ldots,a_k^{(k)}, & a_k^{(k+1)},\ldots,a_k^{(n)} \\ a_{k+1}^{(1)},\ldots,a_{k+1}^{(k)}, & a_{k+1}^{(k+1)},\ldots,a_{k+1}^{(n)} \end{matrix}\right\| \tag{*}$$

и последние $n-m$ столбцов. Вычисляя его таким же образом, как мы делали в § 19, находим, что он равен

$$\left(\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_1,x_{m+1},\ldots,x_n)}\right)+p_1\left(\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0}{D(z,x_{m+1},\ldots,x_n)}\right)+$$

$$+p_{m+1}\left(\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_1,z,x_{m+1},\ldots,x_n)}\right)+\ldots+p_n\left(\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_1,x_{m+1},\ldots,x_{n-1},z)}\right). \quad (58)$$

определитель из первых k строк и первых k столбцов не нуль, тогда как все определители, его заключающие, т. е. определители порядка $k+1$, содержащие элементы первых k столбцов и первых k строк, равны нулю. Докажем, что все определители порядка $k+1$ равны нулю.

Возьмем какой-нибудь такой определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^{(\alpha_1)},\ldots,a_1^{(\alpha_{k+1})} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_k^{(\alpha_1)},\ldots,a_k^{(\alpha_{k+1})} \\ a_{k+1}^{(\alpha_1)},\ldots,a_{k+1}^{(\alpha_{k+1})} \end{vmatrix} \qquad (**)$$

и докажем, что он равен нулю. Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)},\ldots,a_1^{(k)}, & a_1^{(\alpha)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_k^{(1)},\ldots,a_k^{(k)}, & a_k^{(\alpha)} \\ a_{k+1}^{(1)},\ldots,a_{k+1}^{(k)}, & a_{k+1}^{(\alpha)} \end{vmatrix}$$

По условию он равен нулю. Разлагаем его по элементам последнего столбца. Получаем:

$$\delta_1 a_1^{(\alpha)}+\delta_2 a_2^{(\alpha)}+\ldots+\delta_k a_k^{(\alpha)}+\delta\, a_{k+1}^{(\alpha)}=0,$$

где δ есть определитель из первых k строк и k столбцов таблицы (*), т. е. не равен нулю. Давая α значения $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k+1}$, получим систему из $k+1$ уравнений:

$$\delta_1 a_1^{(\alpha_1)}+\delta_2 a_2^{(\alpha_1)}+\ldots+\delta_k a_k^{(\alpha_1)}+\delta\, a_{k+1}^{(\alpha_1)}=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_1 a_1^{(\alpha_k)}+\delta_2 a_2^{(\alpha_k)}+\ldots+\delta_k a_k^{(\alpha_k)}+\delta\, a_{k+1}^{(\alpha_k)}=0$$
$$\delta_1 a_1^{(\alpha_{k+1})}+\delta_2 a_2^{(\alpha_{k+1})}+\ldots+\delta_k a_k^{(\alpha_{k+1})}+\delta\, a_{k+1}^{(\alpha_{k+1})}=0.$$

Так как эта система из $k+1$ уравнений имеет решение, в котором не все неизвестные $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k$, δ равны нулю, именно, $\delta\neq 0$, определитель из коэффициентов системы нуль. Этот же определитель как раз определитель (**).

Запишем теперь, что функции (52) удовлетворяют системе (17′). Подставляя их в первое уравнение системы, мы получим тожества

$$\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_1}+a_1^{(m+1)}\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_{m+1}}+\ldots+a_1^{(n)}\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_n}+a_1^{(0)}\frac{\partial u_{m+1}}{\partial z}\equiv 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+a_1^{(m+1)}\frac{\partial u_n}{\partial x_{m+1}}+\ldots+a_1^{(n)}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+a_1^{(0)}\frac{\partial u_n}{\partial z}\equiv 0$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1}+a_1^{(m+1)}\frac{\partial u_0}{\partial x_{m+1}}+\ldots+a_1^{(n)}\frac{\partial u_0}{\partial x_n}+a_1^{(0)}\frac{\partial u_n}{\partial z}\equiv 0,$$

которые после замены z его значением принимают вид:

$$\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_1}\right)+(a_1^{(m+1)})\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_{m+1}}\right)+\ldots+(a_1^{(n)})\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial x_n}\right)+$$
$$+(a_1^{(0)})\left(\frac{\partial u_{m+1}}{\partial z}\right)\equiv 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)+(a_1^{(m+1)})\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_{m+1}}\right)+\ldots+(a_1^{(n)})\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)+$$
$$+(a_1^{(0)})\left(\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)\equiv 0$$

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\right)+(a_1^{(m+1)})\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_{m+1}}\right)+\ldots+(a_1^{(n)})\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_n}\right)+$$
$$+(a_1^{(0)})\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)\equiv 0.$$

Трактуя последние равенства как уравнения относительно

$$1,(a_1^{(m+1)}),\ldots,(a_1^{(n)}),(a_1^{(0)}),$$

получаем из них

$$\frac{\left(\dfrac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,\ u_0)}{D(x_{m+1},\ldots,x_n,\ z)}\right)}{1}=\frac{-\left(\dfrac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,\ u_0)}{D(x_1,x_{m+2},\ldots,x_n,\ z)}\right)}{(a_1^{(m+1)})}=$$

$$=\frac{(-1)^2\left(\dfrac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,\ u_0)}{D(x_1,\ x_{m+1},\ x_{m+3},\ \ldots,\ x_n,\ z)}\right)}{(a_1^{(m+2)})}=$$

$$=\ldots=\frac{(-1)^{n-m}\left(\dfrac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,\ u_0)}{D(x_1,\ x_{m+1},\ldots,x_{n-1},\ z)}\right)}{(a_1^{(n)})}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-m+1}\left(\dfrac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_1,x_{m+1},\ldots,x_n)}\right)}{(a_1^{(0)})}. \tag{59}$$

Так как

$$\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_{m+1},\ldots,x_n,z)}=(-1)^{n-m}\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(z,x_{m+1},\ldots,x_n)}$$

$$(-1)\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_1,x_{m+2},\ldots,x_n,z)}=(-1)^{n-m}\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_1,z,x_{m+2},\ldots,x_n)}$$

. . . .

получаем, обозначая через $(-1)^{n-m}M$ общий знаменатель отношений (59)

$$\left(\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(z,x_{m+1},\ldots,x_n)}\right)=M$$

$$\left(\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x,z,x_{m+2},\ldots,x_n)}\right)=M(a_1^{(m+1)}),$$

. . . .

$$\left(\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_1,x_{m+1},\ldots,x_{n-1},z)}\right)=M(a_1^{(n)})$$

$$\left(\frac{D(u_{m+1},\ldots,u_n,u_0)}{D(x_1,x_{m+1},\ldots,x_n)}\right)=-M(a_1^{(0)}).$$

Вследствие этого изучаемый определитель равен

$$M[p_1+(a_1^{(m+1)})\,p_{m+1}+\ldots+(a_1^{(n)})\,p_n-(a_1^{(n)})],$$

т. е. равен нулю, так как квадратная скобка в последнем равенстве есть результат подстановки вместо z его значения в первое из уравнений (9′).

Таким же образом можно доказать, что равны нулю и остальные определители таблицы (57) и, значит, установить, что функции (56) действительно связаны зависимостью.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ.

48. Постановка задачи. Положим, что

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_m \tag{1}$$

независимые переменные, а

$$x_{m+1},\ x_{m+2},\ldots,x_n \tag{2}$$

их неизвестные функции, и положим, что неизвестные (2) связаны с переменными (1) при помощи системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+1} = b_1^{(m+1)}dx_1 + b_2^{(m+1)}dx_2 + \ldots + b_m^{(m+1)}dx_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_{m+h} = b_1^{(m+h)}dx_1 + b_2^{(m+h)}dx_2 + \ldots + b_m^{(m+h)}dx_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n = b_1^{(n)}dx_1 + b_2^{(n)}dx_2 + \ldots + b_m^{(n)}dx_m, \end{array}\right\} \quad (3)$$

в которой коэффициенты

$$b_k^{(m+h)}, \qquad (h=1, 2, \ldots, n-m, \ k=1, 2, \ldots, m) \quad (4)$$

данные функции от аргументов (1) и (2).

Обобщая задачу, рассматриваемую в курсе обыкновенных уравнений, в которой ищется функция x_{m+1}, связанная с аргументами (1) одним уравнением (и в котором коэффициенты b не зависят от неизвестных (2)), мы можем задачу нахождения функций (2) поставить так: *найти из уравнений* (3) *такие функции* (2), *что при*

$$x_1 = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)} \quad x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)},$$

где числа

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \quad (5)$$

выбраны при единственном условии, чтобы все коэффициенты (4) *были голоморфны вблизи точки* (5).

Ясно, как это обнаруживается и в указанном выше частном случае, коэффициенты (4) не могут быть произвольны. Нашей ближайшей задачей будет, поэтому, нахождение условий, связывающих коэффициенты (4), необходимых для возможности существования решения задачи, и установление достаточности этих условий.

49. Необходимые условия возможности существования решения задачи. По смыслу уравнений, коэффициенты при дифференциалах в правых частях уравнений (3) равны производным от функций, стоящих в левых частях. Записывая это, имеем уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1} = b_1^{(m+1)}, \quad \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_2} = b_2^{(m+1)}, \ldots, \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_m} = b_m^{(m+1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_{m+h}}{\partial x_1} = b_1^{(m+h)}, \quad \dfrac{\partial x_{m+h}}{\partial x_2} = b_2^{(m+h)}, \ldots, \dfrac{\partial x_{m+h}}{\partial x_m} = b_m^{(m+h)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial x_1} = b_1^{(n)}, \quad \dfrac{\partial x_n}{\partial x_2} = b_2^{(n)}, \ldots, \dfrac{\partial x_n}{\partial x_m} = b_m^{(n)}. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Система уравнений (6) вполне равносильна системе (3).

Пользуясь теоремой о независимости производной от порядка дифференцирования, из уравнений (6) непосредственно заключаем, что должны быть соблюдены условия:

$$\frac{\partial^2 x_{m+h}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial x_{m+h}}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_{m+h}}{\partial x_i}\right),$$

которые на основании уравнений (6) переписываются так:

$$\frac{db_k^{(m+h)}}{dx_i} = \frac{db_i^{(m+h)}}{dx_k}, \quad (h = 1, 2, \ldots, n-m; \quad i,\ k = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Мы поставили в (7) прямые d во избежание недоразумения, помня, что b сложные функции от аргументов (1).

Выполняя в левой части дифференцирование и пользуясь снова системой (6), находим:

$$\frac{db_k^{(m+h)}}{dx_i} = \frac{\partial b_k^{(m+h)}}{\partial x_i} + \frac{\partial b_k^{(m+h)}}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial b_k^{(m+h)}}{\partial x_{m+2}} \frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial b_k^{(m+h)}}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = \frac{\partial b_k^{(m+h)}}{\partial x_i} + \frac{\partial b_k^{(m+h)}}{\partial x_{m+1}} b_i^{(m+1)} + \frac{\partial b_k^{(m+h)}}{\partial x_{m+1}} b_i^{(m+2)} + \ldots + \frac{\partial b_k^{(m+h)}}{\partial x_n} b_i^{(n)}.$$

Вводя теперь в рассмотрение операторы

$$X_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + b_i^{(m+1)} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + b_i^{(m+2)} \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} + \ldots + b_i^{(n)} \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

мы можем последнему равенству дать вид

$$\frac{db_k^{(m+h)}}{dx_i} = X_i(b_k^{(m+h)})$$

и, значит, условиям (7) вид

$$X_i(b_k^{(m+h)}) = X_k(b_i^{(m+h)}), \quad (h = 1, 2, \ldots, n-m; \quad i,\ k = 1, 2, \ldots, m) \tag{7$_1$}$$

Условия (7_1) и есть те необходимые условия возможности существования решения, которые мы имели в виду.

Вспоминая сказанное в § 21, а именно формулы (3_1), мы видим, что соблюдение равенств (7_1) есть условие, что система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} X_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + b_1^{(m+1)} \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + b_1^{(n)} \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_m} + b_m^{(m+1)} \dfrac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + b_m^{(n)} \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

есть система замкнутая; будучи замкнутой, она, как нормальная, якобиева. Действительно, при соблюдении условий (7_1)

$$(X_i, X_k) = X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) =$$

$$= \sum_{h=1}^{h=n-m} \{ X_i(b_k^{(m+h)}) - X_k(b_i^{(m+h)}) \} \frac{\partial f}{\partial x_{m+h}} \equiv 0.$$

Обратно, если система (9) якобиева, то соблюдены условия (7).

50. Достаточность найденных условий. Для установления достаточности найденных условий достаточно показать, что при соблюдении их может быть найдено решение системы (3).

Положим, что система (9) якобиева. Найдем ее алгебраически независимые решения

$$f_{m+1}, \ f_{m+2}, \dots, f_n; \tag{10}$$

составим уравнения

$$f_{m+1} = C_{m+1}, \ f_{m+2} = C_{m+2}, \dots, f_n = C_n, \tag{11}$$

в которых $C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_n$ произвольные постоянные. Пользуясь алгебраической независимостью функций (10) относительно аргументов $x_{m+1}, \dots, x_n$, решим систему (11) относительно этих аргументов.

Мы получаем функции, зависящие от $n - m$ произвольных постоянных:

$$\left.\begin{array}{l} x_{m+1} = \varphi_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_m, C_{m+1}, \dots, C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m, C_{m+1}, \dots, C_n) \end{array}\right\} \tag{12}$$

Функции (12) образуют решение системы (3).

Для доказательства надо установить, что дифференциалы функций (12):

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+1} = \dfrac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_m} dx_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_n = \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} dx_m \end{array}\right\} \tag{13}$$

после подстановки в уравнения (3) и исключения функций (12) обращают их в тожества. Замечаем прежде всего, что формулы (13) можно было бы найти, продифференцировав уравнения (11), т. е. приравняв нулю дифференциалы функций (10):

$$\left.\begin{aligned}
df_{m+1} &= \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_m}dx_m + \\
&\quad + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}}dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n}dx_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
df_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m}dx_m + \\
&\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}}dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

кайдя из полученных уравнений

$$dx_{m+1},\ dx_{m+2}, \ldots, dx_n \qquad (13')$$

и исключив неизвестные функции при помощи уравнений (12).

Отсюда ясно, что вместо того чтобы подставлять дифференциалы (13) в уравнения (3) и исключать неизвестные (12), можно из уравнений (3) дифференциалы (13′) подставлять в уравнения (14) и исключать неизвестные (12). Если в результате этих действий получатся нули, то функции (12) будут решениями системы (3). Мы установим, что дифференциалы (14) обратятся в нуль тожественно после исключения дифференциалов (13′) при помощи уравнений (3) даже без исключения функций (12), откуда тем скорее вытечет справедливость утверждения.

Чтобы доказать это, рассмотрим, во что обращается вообще дифференциал некоторой функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ после исключения из него дифференциалов (13′). Выполняя выкладки, находим:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial\Phi}{\partial x_{m+1}}dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}dx_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_{m+1}}b_k^{(m+1)} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_{m+2}}b_k^{(m+2)} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}b_k^{(n)}\right\}dx_k,$$

т. е.

$$d\Phi = X_1(\Phi)\,dx_1 + X_2(\Phi)\,dx_2 + \ldots + X_m(\Phi)\,dx_m. \qquad (15)$$

Применяя формулу (15) к дифференциалам (14), заключаем:

$$\begin{aligned}
df_{m+1} &= X_1(f_{m+1})\,dx_1 + \ldots + X_m(f_{m+1})\,dx_m \equiv 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
df_n &= X_1(f_n)\,dx_1 + \ldots + X_m(f_n)\,dx_m \equiv 0,
\end{aligned}$$

так как функции (10) образуют решения системы (9).

Итак, высказанное утверждение доказано, и мы имеем теорему

Теорема. *Для того чтобы система* (3) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы система* (9) *была якобиевой. Если система* (9) *якобиева, мы находим решение системы* (3), *приравняв произвольным постоянным какие-нибудь $n-m$ алгебраически независимых решений системы* (9) *и решив полученные уравнения относительно неизвестных системы* (3).

Каждое из равенств (11), полученных приравнением произвольной постоянной какого-нибудь решения системы (9), мы назовем интегралом системы (3). Из сказанного ясно, что система из m полных дифференциалов, удовлетворяющая условиям, необходимым для существования решений, имеет $n-m$ алгебраически независимых интегралов.

51. Решение задачи Коши. Чтобы решить задачу, поставленную в § 48, достаточно за функции (10) брать не первые попавшиеся решения системы (9), но ее главные решения.

Действительно, если при

$$x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)} \tag{16}$$

функции (10) обращаются соответственно в

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$$

то уравнения

$$f_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, f_n = x_n^{(0)} \tag{11'}$$

обратятся при соблюдении равенств (16) соответственно в

$$x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)},$$

откуда ясно, что функции, найденные решением уравнений (11′), как раз искомые.

52. Равносильность задач о системах (3) и (9). Из сказанного в прошлых параграфах вытекает, что вместо системы (3) можно рассматривать систему (9). Обратное, однако, тоже справедливо. Положим, что

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = C \tag{17}$$

какой-нибудь интеграл системы (3), т. е. равенство, которое при некотором выборе постоянной C обращается в тожество после замены в нем $x_{m+1}, \ldots, x_n$ решениями системы (3). Тогда φ есть решение системы (9). Действительно, так как (17) интеграл системы (3), то на основании уравнений (3) дифференциал φ равен нулю. Но вследствие (15):

$$d\varphi = X_1(\varphi)\,dx_1 + X_2(\varphi)\,dx_2 + \ldots + X_m(\varphi)\,dx_m \equiv 0.$$

Вследствие того, что $x_1, \ldots, x_m$ независимые переменные, а их дифференциалы вполне произвольны, из последнего равенства имеем:

$$X_1(\varphi) \equiv 0, \quad X_2(\varphi) \equiv 0, \ldots, X_m(\varphi) \equiv 0.$$

Это замечание делает иногда полезным рассмотрение системы (3) вместе с системой (9), так как иногда для системы (3) легко угадать интегралы.

Если мы найдем $n-m$ интегралов системы (3), мы полностью проинтегрируем систему (9).

53. Интегрирование системы (3). Метод, аналогичный методу **Якоби.** В виду эквивалентности задач интегрирования систем (3) и (9), всякой теореме о системе (9) должна соответствовать некоторая теорема, аналогичная ей, о системе (3). Укажем сначала методу интегрирования системы (3), аналогичную методе Якоби интегрирования системы (9), разобранной в § 28. Примем во внимание уравнения таблицы (6), заполняющие в ней первый столбец:

$$\frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1}=b_1^{(m+1)},\quad \frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_1}=b_1^{(m+2)},\ldots,\frac{\partial x_n}{\partial x_1}=b_1^{(n)} \tag{18}$$

и проинтегрируем систему (18), считая в ней $x_2, x_3,\ldots,x_m$ постоянными, а переменной независимой только x_1.

Положим

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_{m+1}(x_1, x_2,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n)=\alpha_{m+1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_n(x_1, x_2,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n)=\alpha_n\end{array}\right\} \tag{19}$$

алгебраически независимые интегралы системы (18). После подстановки в их правые части вместо $x_{m+1},\ldots,x_n$ решений системы (18), из правых частей должен исчезнуть x_1. Но $x_2,\ldots,x_m$, которые мы считали при интегрировании системы (18) постоянными, могут остаться. Значит $\alpha_{m+1},\ldots\alpha_n$, вообще говоря, функции от $x_2,\ldots,x_m$.

Заметим, что левая часть каждого из интегралов (19) есть решение уравнения

$$X_1(f)=0. \tag{20}$$

Действительно, если h одно из чисел $1, 2,\ldots, n-m$, на основании уравнений (18) имеем

$$d\varphi_{m+h}=0=\frac{\partial\varphi_{m+h}}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi_{m+h}}{\partial x_{m+1}}dx_{m+1}+\ldots+\frac{\partial\varphi_{m+h}}{\partial x_n}dx_n=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi_{m+h}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_{m+h}}{\partial x_{m+1}}b_1^{(m+1)}+\ldots+\frac{\partial\varphi_{m+h}}{\partial x_n}b_1^{(n)}\right)dx_1$$

т. е.

$$X_1(\varphi_{m+h})=0. \tag{20$_1$}$$

Выберем теперь, как в методе Якоби, левые части уравнений (19) за новые неизвестные, положив:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_{m+1}(x_1, x_2,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n)=y_{m+1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_n(x_1, x_2,\ldots,x_m, x_{m+1},\ldots,x_n)=y_n.\end{array}\right\} \tag{19$_1$}$$

Применяя формулу (15), мы заключаем, что новые неизвестные

$$y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n \tag{21}$$

удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} dy_{m+1} = X_1(\varphi_{m+1})\,dx_1 + X_2(\varphi_{m+1})\,dx_2 + \ldots + X_m(\varphi_{m+1})\,dx_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_n = X_1(\varphi_n)\,dx_1 + X_2(\varphi_n)\,dx_2 + \ldots + X_m(\varphi_n)\,dx_m. \end{array}\right\} \tag{22}$$

В системе (22) коэффициенты при dx_1 равны нулю на основании равенств (20_1); не трудно убедиться, что остальные коэффициенты, будучи представлены как функции от аргументов (21), не зависят от x_1.

Действительно, так как система (9) якобиева, имеем тожественно:

$$X_1(X_k(f)) - X_k(X_1(f)) \equiv 0$$

и значит, вследствие (20)

$$0 \equiv X_1(X_k(\varphi_{m+h})) - X_k(X_1(\varphi_{m+h})) = X_1(X_k(\varphi_{m+h})).$$

Значит

$$X_k(\varphi_{m+h})$$

решение уравнения (20) и, значит, функция от его решений

$$x_2, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n. \tag{23}$$

Итак система (22) имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} dy_{m+1} = c_2^{(m+1)}\,dx_2 + \ldots + c_m^{(m+1)}\,dx_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_n = c_2^{(n)}dx_2 + \ldots + c_m^{(n)}\,dx_m, \end{array}\right\} \tag{22'}$$

где коэффициенты c зависят только от аргументов (23), т. е. она того же вида, как и система (3), но зависит от меньшего числа независимых переменных.

С системой (22') мы можем возобновить наши рассуждения. Найдя решения системы

$$\frac{\partial y_{m+1}}{\partial x_2} = c_2^{(m+1)}, \quad \frac{\partial y_{m+2}}{\partial x_3} = c_2^{(m+2)}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_2} = c_2^{(n)}, \tag{18_1}$$

в которой на $x_3, \ldots, x_m$ смотрим как на постоянные, и взяв за новые неизвестные

$$z_{m+1}, z_{m+2} \ldots, z_n$$

левые части ее интегралов, мы заменим систему (22_1) системой

$$\left.\begin{array}{l} dz_{m+1} = g_3^{(m+1)}\,dx_3 + \ldots + g_m^{(m+1)}\,dx_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dz_n = g_3^{(n)}\,dx_3 + \ldots + g_m^{(n)}\,dx_m, \end{array}\right\} \tag{24}$$

в которой коэффициенты g зависят только от

$$x_3,\ x_4 \ldots,\ x_m,\ z_{m+1}, \ldots, z_n$$

и с системой (24) возобновим свои операции, пока, после $m-1$ таких шагов, не получим системы вида

$$\left.\begin{array}{l} du_{m+1} = h_m^{(m+1)}\ dx_m \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ du_n = h_m^{(n)}\, dx_m \end{array}\right\} \qquad (25)$$

в которой h зависят только от

$$x_m,\ u_{m+1}, \ldots,\ u_n.$$

Интегрирование этой системы дает значения последних неизвестных в функции от x_m и $n-m$ произвольных постоянных.

Возвращаясь шаг за шагом назад к старым неизвестным, мы найдем окончательно их значения.

54. Интегрирование системы (3). Метод, аналогичный методу Коши. Условимся обозначать как в § 34 знаком $(f)_k$ результат подстановки в функцию

$$f(x_1,\ x_2, \ldots, x_k,\ x_{k+1}, \ldots, x_m, \ldots, x_n)$$

чисел $x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$ на место $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k$, т. е. функцию

$$f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots,\ x_k^{(0)},\ \ x_{k+1}, \ldots,\ x_m, \ldots,\ x_n).$$

Положим, что ищется решение системы (3), удовлетворяющее условию: при

$$x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}:\ \ x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \ldots,\ x_n = x_n^{(0)}.$$

При только что введенных обозначениях последние условия мы можем передать равенствами:

$$(x_{m+1})_m = x_{m+1}^{(0)}, \ldots, (x_n)_m = x_n^{(0)}.$$

Применяя методу прошлого параграфа, мы вместо первых попавшихся интегралов системы (18) возьмем интегралы Коши, т. е. положим, что соблюдены условия:

$$(\varphi_{m+1})_1 = x_{m+1}, \ldots, (\varphi_n)_1 = x_n. \qquad (26)$$

При таком выборе интегралов системы (18), система (22′) имеет особенно простой вид. Вычисляем ее коэффициент:

$$c_k^{(m+h)} = X_k\ (\varphi_{m+h});$$

вспоминая, что, как функция от новых переменных, он не зависит от x_1, мы можем, вычислив его, подставлять $x_1^{(0)}$ вместо x_1, и если

$$X_k\,(\varphi_{m+h}) = \omega\,(x_2, \ldots, x_m,\ y_{m+1},\ y_{m+2}, \ldots, y_n),$$

на основании (26) писать:

$$\omega(x_2,\ldots,x_m, y_{m+1},\ldots,y_n)=(X_k\ (\varphi_{m+k}))_1=$$
$$=\frac{\partial(\varphi_{m+h})_1}{\partial x_k}+(b_k^{(m+1)})_1\frac{\partial(\varphi_{m+h})_1}{\partial x_{m+1}}+\ldots+$$
$$+(b_k^{(m+h)})_1\frac{\partial(\varphi_{m+h})_1}{\partial x_{m+h}}+\ldots+(b_k^{(n)})_1\frac{\partial(\varphi_{m+n})_1}{\partial x_n}=$$
$$=(b_k^{(m+h)})_1=b_k^{(m+h)}(x_1^{(0)},\ x_2,\ldots x_{m+1},\ldots x_n).$$

Так как и новые неизвестные не зависят от x_1, их значения можно находить также подставляя $x_1^{(0)}$ вместо x_1 в их выражения через аргументы (1) и (2), откуда на основании (26)

$$y_{m+1}=(x_{m+1})_1,\ldots,y_n=(x_n)_1.$$

и, значит, окончательно, система (22′) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} d(x_{m+1})_1&=(b_2^{(m+1)})_1dx_2+\ldots+(b_m^{(m+1)})_1\,dx_m\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ d(x_n)_1&=(b_2^{(n)})_1\,dx_2+\ldots+(b_m^{(n)})_1\,dx_n,\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

где теперь

$$(b_k^{(m+h)})_1=b_k^{(m+h)}(x_1^{(0)},\ x_2,\ldots,x_m,\ (x_{m+1})_1,\ldots,(x_n)_1).$$

Продолжая так далее, мы должны интегрировать систему

$$\frac{\partial(x_{m+1})_1}{\partial x_2}=(b_2^{(m+1)})_1,\ \ldots,\ \frac{\partial(x_n)_1}{\partial x_2}=(b_2^{(n)})_1,$$

считая в ней $x_3,\ldots,x_m$ постоянными и, найдя интегралы Коши системы, отвечающие $x_2=x_2^{(0)}$, приравнять их решениям системы:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1})_2&=(b_3^{(m+1)})_2\,dx_3+\ \ldots\ +(b_m^{(m+1)})_2\,dx_m\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ d(x_n)_2&=(b_3^{(n)})_2\,dx_3+\ldots+(b_m^{(n)})_2\,dx_m\end{aligned}$$

и поступать так далее, пока не придем к интегрированию системы:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1})_{m-1}&=(b_m^{(m+1)})_{m-1}\,dx_m\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ d(x_n)_{m-1}&=(b_m^{(n)})_{m-1}\,dx_m,\end{aligned}$$

или системы:

$$\frac{\partial(x_{m+1})_{m-1}}{\partial x_m}=(b_m^{(m+1)})_{m-1},\ \ldots,\ \frac{\partial(x_n)_{m-1}}{\partial x_m}=(b_m^{(n)})_{m-1}$$

при начальных условиях: при

$$x_m = x_m^{(0)}: \quad (x_{m+1})_{m-1} = x_{m-1}^{(0)}, \ldots, (x_n)_{m-1} = x_n^{(0)}.$$

Возвращение шаг за шагом к старым переменным приведет к нахождению решения.

55. Примеры. 1) Найти решение уравнения:

$$dx_1 + \frac{x_1}{x_2} dx_2 - \frac{x_1}{2x_3} dx_3 = 0. \tag{28}$$

Соответствующая уравнению система:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_1}{x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{x_1}{2x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

замкнутая. Действительно, мы имеем для скобки Пуассона:

$$1 \cdot 0 - \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{1}{2x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} - 1 \cdot 0 - \frac{x_1}{2x_3}\left(-\frac{1}{x_2}\right) \frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv 0.$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2},$$

при условии $x_1 = x_1^{(0)}$ при $x_2 = 1$, получаем

$$x_1 x_2 = x_1^{(0)}.$$

Положив

$$x_1 x_2 = y, \tag{29}$$

находим для y уравнение

$$dy - \frac{y}{2x_3} dx_3 = 0,$$

интегрирование которого при условии $y = x_1^{(0)}$ при $x_3 = 1$ дает

$$\frac{y}{\sqrt{x_3}} = x_1^{(0)}, \quad y = x_1^{(0)} \sqrt{x_3}.$$

Подставляя в уравнение (29), получаем

$$x_1 x_2 = x_1^{(0)} \sqrt{x_3}, \quad x_1 = \frac{x_1^{(0)} \sqrt{x_3}}{x_2}.$$

Разделив однако обе части уравнения (28) на x_1, находим

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} - \frac{dx_3}{2x_3} = 0,$$

что непосредственно дает

$$\log x_1 + \log x_2 - \frac{1}{2} \log x_3 = \log C; \; x_1 x_2 = C\sqrt{x_3} = x_1^{(0)} \sqrt{x_3}.$$

2) Проинтегрировать систему

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} + (x_2 - 1)\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$$
$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} + 2\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.$$

Система якобиева, так как

$$(X_1, X_2) = \frac{\partial f}{\partial x_5} - \frac{\partial f}{\partial x_5} \equiv 0.$$

Составляя соответствующую систему в полных дифференциалах, имеем

$$dx_3 = dx_1 + 2dx_2$$
$$dx_4 = x_1 dx_1 - x_2 dx_2$$
$$dx_5 = (x_2 - 1)\, dx_1 + x_1 dx_2.$$

Так как правые части от неизвестных x_3, x_4, x_5 не зависят, находим, непосредственно интегрируя

$$x_3 = x_1 + 2x_2 + C_3$$
$$x_4 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + C_4$$
$$x_5 = (x_2 - 1)\, x_1 + C_5,$$

откуда ясно, что решения предложенной системы:

$$x_3 - x_1 - 2x_2, \quad x_4 - \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2), \quad x_5 - (x_2 - 1)\, x_1.$$

3) В § 29 мы видели, что система

$$p_1 + \frac{x_3x_4 - x_1x_2}{x_1x_4 + x_2x_3} p_3 - \frac{x_4^2 + x_2^2}{x_1x_4 + x_2x_3} p_4 = 0$$
$$p_2 - \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1x_4 + x_2x_3} p_3 + \frac{x_3x_4 - x_1x_2}{x_1x_4 + x_2x_3} p_4 = 0$$

якобиева. Составив соответствующую систему в полных дифференциалах:

$$dx_3 = \frac{x_3x_4 - x_1x_2}{x_1x_4 + x_2x_3} dx_1 - \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1x_4 + x_2x_3} dx_2$$
$$dx_4 = -\frac{x_4^2 + x_2^2}{x_1x_4 + x_2x_3} dx_1 + \frac{x_3x_4 - x_1x_2}{x_1x_4 + x_2x_3} dx_2,$$

ищем то ее решение, в котором: $x_3 = x_3^{(0)}$, $x_4 = x_4^{(0)}$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Отыскивая интегралы Коши системы:

$$dx_3 = \frac{x_3x_4 - x_1x_2}{x_1x_4 + x_2x_3} dx_1, \qquad dx_4 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_4 + x_2x_3} dx_1,$$

считая в ней x_2 постоянным, находим:

$$x_4 dx_1 + x_1 dx_4 - x_2 dx_3 = 0,$$

откуда

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = C_1.$$

Далее находим

$$x_2 dx_1 + x_4 dx_3 + x_3 dx_4 = 0,$$

откуда

$$x_2 x_1 + x_3 x_4 = C_2.$$

Искомые интегралы получим из уравнений

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = -x_2 x_3^{(0)}, \quad x_2 x_1 + x_3 x_4 = x_3^{(0)} x_4^{(0)},$$

решая их относительно $x_3^{(0)}$ и $x_4^{(0)}$. Выполняя выкладки, получаем

$$x_4^{(0)} = -\frac{x_2 x_1 + x_3 x_4}{x_1 x_4 - x_2 x_3}, \quad x_2, x_3^{(0)} = -\frac{(x_1 x_4 - x_2 x_3).}{x_2}$$

Беря правые части последних равенств за новые неизвестные положив в них $x_1 = 0$, находим

$$d(x_3)_1 = -\frac{(x_3)_1}{x_2} dx_2, \quad d(x_4)_1 = \frac{(x_4)_1}{x_2} dx_2,$$

откуда заключаем, что

$$(x_3)_1 x_2 = x_3^{(0)}, \quad \frac{(x_4)_1}{x_2} = x_4^{(0)}.$$

Искомые функции находим из уравнений:

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = -x_3^{(0)}, \quad \frac{x_2 x_1 + x_3 x_4}{x_1 x_4 - x_2 x_3} = -x_4^{(0)}.$$

56. Уравнения характеристических многообразий систем линейных уравнений. Согласно с определением, данным в § 33, если

$$f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n \tag{10}$$

алгебраически независимые решения системы

$$\left.\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{\partial z}{\partial x_1} + b_1^{(m+1)} \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} + \ldots + b_1^{(n)} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m(z) &= \frac{\partial z}{\partial x_m} + b_m^{(m+1)} \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} + \ldots + b_m^{(n)} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

то собрание уравнений

$$f_{m+1} = c_{m+1}, \quad f_{m+2} = c_{m+2}, \ldots, f_n = c_n \tag{11}$$

$$z = c, \tag{11$_1$}$$

в которых $c_{m+1}, \ldots, c_n$, c — произвольные постоянные, определяет характеристическое многообразие системы (9′).

Но равенства (11) и (11_1) очевидно образуют интегралы системы

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+1}=b_1^{(m+1)}\,dx_1+b_2^{(m+1)}\,dx_2+\ldots+b_m^{(m+1)}\,dx_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_n=b_1^{(n)}\,dx_1+b_2^{(n)}\,dx_2+\ldots+b_m^{(n)}\,dx_m \end{array}\right\}\quad(3)$$

$$dz=0. \qquad (3_1)$$

Итак, нахождение характеристических многообразий системы (9′), сводится к нахождению собрания интегралов системы в полных дифференциалах из уравнений (3) и (3_1). Поэтому систему из уравнений (3) и (3_1) можно называть системой уравнений характеристических многообразий системы (9_1).

Положим далее, что дана система неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} p_1+b_1^{(m+1)}\,p_{m+1}+\ \ldots\ +b_1^{(n)}p_n=b_1^{(0)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m+b_{m\,1}^{(m+1)}\,p_{m+1}+\ \ldots\ +b_m^{(n)}\,p_n=b_m^{(n)}, \end{array}\right\}\quad(30)$$

которую мы считаем замкнутой. Интегрирование системы (30) сводится к нахождению z из уравнения

$$V(x_1,\ldots,x_n,\,z)=0,$$

где V находится интегрированием системы

$$\left.\begin{array}{l} q_1+b_1^{(m+1)}\,q_{m+1}+\ldots+b_1^{(n)}\,q_n+b_1^{(0)}\,q=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_m+b_m^{(m+1)}\,q_{m+1}+\ldots+b_m^{(n)}\,q_n+b_m^{(0)}\,q=0 \end{array}\right\}\quad(31)$$

в уравнениях (31)

$$q_i=\frac{\partial V}{\partial x_i},\qquad q=\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Если

$$V_{m+1},\ V_{m+2},\ldots,V_n,V_0 \qquad (32)$$

алгебраически независимые решения системы (31), то, согласно определениям, данным в § 46, собрание уравнений

$$V_{m+1}=c_{m+1},\ V_{m+2}=c_{m+2},\ldots,V_n=c_n,\ V_0=c \qquad (33)$$

определяет характеристические многообразия системы (30). Но каждое из равенств (33) есть интеграл системы в полных дифференциалах

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+1}=b_1^{(m+1)}\,dx_1+b_2^{(m+1)}\,dx_2+\ldots+b_m^{(m+1)}\,dx_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_n=b_1^{(n)}\,dx_1+b_2^{(n)}\,dx_2+\ldots+b_m^{(n)}\,dx_m \\ dz=b_1^{(0)}\,dx_1+b_2^{(0)}\,dx_2+\ldots+b_m^{(0)}\,dx_m. \end{array}\right\}\quad(34)$$

Систему (34) поэтому можно называть системой уравнений характеристических многообразий системы (30).

Из сказанного вытекает, что интегрирование системы в полных дифференциалах, соответствующей некоторой замкнутой системе уравнений, вместо самой системы равносильно выполнению интегрирования системы, начиная с нахождения ее характеристических многообразий. Такой прием соответствует приемам, указанным в главе первой для интегрирования одного уравнения.

Например, для нахождения того решения системы (30), в котором

$$\text{при} \quad x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}: \quad z = \vartheta(x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

надо искать характеристические многообразия, расположенные на этом решении. Для этого достаточно решить для системы (34) задачу Коши по правилам § 51, считая $x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ произвольными, а z_0 равным $\vartheta(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Самое решение есть геометрическое место найденных характеристических многообразий, т. е. получается из них исключением $x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

О ПОЛНОМ ИНТЕГРАЛЕ ЛАГРАНЖА.

57. **Основные определения.** Положим, что дано уравнение

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{1}$$

левая часть которого, кроме n независимых переменных, зависит еще от n произвольных постоянных. Мы не считаем функцию V однозначной функцией от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так же как и от аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_n$; если V многозначная, мы понимаем под (1) одну из ее ветвей. Трактуя z как функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ищем ее производные по этим аргументам. Дифференцируя по $x_1, \ldots, x_n$, получаем:

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ \ldots, \ p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2), число которых $n+1$, зависят от n аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Значит эти аргументы можно из них исключить. При таком исключении может обнаружиться одно из двух: или после исключения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ получится только одна зависимость

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{3}$$

связывающая остальные аргументы

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

или таких зависимостей получится несколько.

В первом случае в результате исключения получится дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных (3), для которого z, данное равенством (1), является решением, причем решением, зависящим от n произвольных постоянных. *Это решение уравнения* (3) *называется его полным интегралом Лагранжа.*

Во втором случае уравнение (1) должно быть откинуто: функция V не обладает качествами, при которых она могла бы определить полный интеграл некоторого уравнения.

Если из $n+1$ уравнений (1), (2) можно выбрать n таким образом, что из них можно найти постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то z полный интеграл уравнения (3). Уравнение (3) получается подстановкою на место $a_1, \ldots, a_n$ найденных их значений в неиспользованное уравнение из собрания (1), (2).

Наоборот, если исключение постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ приводит к двум или бо́льшему числу зависимостей, то эти постоянные связаны менее чем n уравнениями и из системы (1), (2) найдены быть не могут. Следовательно данное выше определение можно перефразировать так: z есть полный интеграл уравнения (3), если из $n+1$ уравнений (1), (2) можно выбрать n уравнений так, чтобы из них можно было найти все аргументы $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Из сказанного вытекает, что в соответствие некоторым уравнениям в частных производных первого порядка можно привести полный интеграл. Можно непосредственно установить, что в соответствие всякому уравнению первого порядка может быть приведен полный интеграл. Мы не останавливаемся здесь на доказательстве этого утверждения, так как в последующем будет указана метода, позволяющая, действуя планомерно, находить полные интегралы по данным уравнениям.

Приведем, для начала, пример функции, не обладающей качествами, необходимыми для того, чтобы она была полным интегралом некоторого уравнения.

Положим

$$z=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}+x_3-a_3; \tag{4}$$

здесь функция z зависит от трех произвольных постоянных. Но

$$\left.\begin{aligned} p_1&=\frac{x_1-a_1}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}}, \quad p_3=1. \\ p_2&=\frac{x_2-a_2}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Третье из уравнений (5) есть уже результат исключения постоянных a_1, a_2, a_3; из первых двух уравнений (5) a_1 и a_2 исключаются возведением уравнений в квадрат и сложением.

Имеем две зависимости:

$$p_1^2+p_2^2=1, \ p_3=1,$$

откуда заключаем, что уравнение (4) не полный интеграл.

С другой стороны, мы всегда найдем полный интеграл уравнения

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0,$$

если нам удастся найти решение его, в котором, например, при

$$x_1=x_1^{(0)}: \quad z=a+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nz_n.$$

Действительно, положим, что

$$z=V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a, a_2, a_3, \ldots, a_n) \tag{1'}$$

такое решение. Составляем уравнения:

$$p_1=\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad p_2=\frac{\partial V}{\partial x_2}, \ \ldots, \ p_n=\frac{\partial V}{\partial x_n}. \tag{2}$$

Из уравнения (1′) и последних $n-1$ уравнений (2) могут быть найдены все постоянные a, a_2, $\ldots$, a_n. Именно, при $x_1 = x_1^{(0)}$ эти уравнения принимают вид

$$z = a + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$
$$p_2 = a_2,\ p_3 = a_3,\ \ldots,\ p_n = a_n.$$

Действительно, желая вычислить, например, значение производной по x_2 при $x_1 = x_1^{(0)}$, мы можем подставить $x_1^{(0)}$ вместо x_1 до дифференцирования и дифференцировать после подстановки.

Полученные последние уравнения, очевидно, допускают решение относительно a_2, a_3, $\ldots$, a_n, a.

Отсюда заключаем, что уравнение (1′) и последние $n-1$ уравнений (2) при произвольном x_1 должны допускать решение относительно этих аргументов, так как они допускают его при некотором частном значении x_1.

Для любого линейного уравнения мы умеем находить решения, удовлетворяющие поставленному начальному условию; следовательно можно считать уже установленным, что любому линейному уравнению первого порядка можно привести в соответствие полный интеграл.

Если, желая избежать употребления многозначных функций, мы, вместо того, чтобы задавать z уравнением (1), зададим его неявно уравнением:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_n) = 0, \tag{1_1}$$

мы можем, при наличии уравнения (1_1), заменить уравнения (2) уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial z} p_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial z} p_n + \frac{\partial W}{\partial x_n} = 0; \tag{2_1}$$

уравнения (2_1) передают производные от z только после исключения из них z; но, приписав к ним уравнение (1_1) и имея в виду, что исключению подлежат a_1, a_2, $\ldots$, a_n, мы можем сохранять их в виде (2_1).

Отметим некоторые частные случаи. Если уравнение (3) может быть решено относительно p_1 и переписано в виде

$$p_1 = F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_2, \ldots, p_n), \tag{6}$$

то наверное уравнение (1) и последние $n-1$ уравнений (2) разрешимы относительно произвольных постоянных.

Иначе из этих уравнений можно было бы их исключить и получить, значит, уравнение, не зависящее от p_1, тогда как, вследствие единственности результата исключения, полученное уравнение должно быть равносильно (6) и, значит, должно содержать p_1.

Также, если уравнение (3) содержит z, то из уравнений (2) можно найти все постоянные a_1, a_2, $\ldots$, a_n; иначе их можно было бы исключить и получить уравнение, не зависящее от z.

Отметим одно следствие предположения, что уравнения (2) разрешимы относительно $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В этом случае якобиан их левых частей относительно этих аргументов не тождественно нуль, и мы имеем:

$$0 \neq \frac{D\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{D(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial a_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial a_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial a_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix}$$

Переставив в определителе столбцы и строки, заключаем, что он равен якобиану

$$\frac{D\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n}\right)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

который, следовательно, не тожественно нуль.

Отсюда следует, что система уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n$$

допускает решение относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Это замечание нам пригодится в дальнейшем.

Отметим в заключение, что когда уравнение (3) не зависит от z и имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{3'}$$

исключение $a_1, a_2, \ldots, a_n$ должно быть выполнимым из одних уравнений (2).

В этом случае подобающим выбором постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ полный интеграл (1) может быть приведен к виду

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + a_n', \tag{1'}$$

в котором одна из постоянных входит аддитивно.

Действительно, замена z на $z - a_n'$ оставляет z решением уравнения (3'); но z принимает вид

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) + a_n'. \tag{1'$_1$}$$

Из уравнений (2) нельзя найти всех постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$; но $n-1$ из них найти можно; иначе в результате их исключения обнаружились бы две зависимости между аргументами $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$.

Положим, что могут быть найдены $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$; тогда a_n можно заменить каким-нибудь числом, выбранным только так, чтобы возможность нахождения $a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}$ сохранилась. Уравнение ($1'_1$) обратится после этого в (1'), из которого можно найти последнее постоянное a_n'.

58. Примеры. Укажем несколько типов уравнений, для которых мы легко можем составить полный интеграл.

1) Уравнение вида

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{7}$$

не зависящее явно от независимых переменных и неизвестной функции.

Для уравнения (7) полный интеграл имеет вид

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + cx_n + a, \tag{8}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, a произвольные постоянные, а c постоянная, найденная из уравнения

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, c) = 0. \tag{9}$$

Действительно, дифференцируя (8), имеем

$$p_1 = a_1,\ p_2 = a_2,\ \ldots,\ p_{n-1} = a_{n-1},\ p_n = c. \tag{10}$$

Замена в (9) $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, c$ их выражениями восстанавливает уравнение (7); значит, (8) есть решение уравнения (7). При этом из уравнений (8) и (10) могут быть найдены $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Значит (8) не первое попавшееся решение уравнения (7), зависящее от n постоянных, но именно полный интеграл.

2) Уравнение вида

$$z = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \tag{11}$$

называется *обобщенным уравнением Клеро*. Его полный интеграл

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{12}$$

Действительно, из (12) имеем

$$p_1 = a_1,\ p_2 = a_2,\ \ldots,\ p_n = a_n. \tag{13}$$

Подставляя в уравнение (11) вместо z и $p_1, \ldots, p_n$ их значения (12) и (13), получаем тожество. Значит (12) решение уравнения (11). Так как из уравнений (13) можно найти $a_1, a_2, \ldots, a_n$, (12) есть полный интеграл уравнения (11).

3) Для нахождения полного интеграла уравнения

$$f_1(x_1, p_1) f_2(x_2, p_2) \ldots f_{n-1}(x_{n-1}, p_{n-1}) f_n(x_n, p_n) = 1, \tag{14}$$

полагаем

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, p_1) = a_1,\ f_2(x_2, p_2) = a_2,\ \ldots,\ f_{n-1}(x_{n-1}, p_{n-1}) = a_{n-1}, \\ f_n(x_n, p_n) = \frac{1}{a_1a_2, \ldots, a_{n-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Решая последние уравнения относительно $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$, находим

$$\left.\begin{aligned} p_1 = \varphi_1(x_1, a_1),\ p_2 = \varphi_2(x_2, a_2),\ \ldots,\ p_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_{n-1}, a_{n-1}), \\ p_n = \varphi_n\left(x_n, \frac{1}{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

откуда заключаем, что

$$z = a + \int \varphi_1 \ (x_1, a_1) \ dx_1 + \int \varphi_2 \ (x_2, a_2) \ dx_2 + \\ + \ldots + \int \varphi_{n-1} \ (x_{n-1}, a_{n-1}) \ dx_{n-1} + \\ + \int \varphi_n \ (x_n, \ \frac{1}{a_1 a_2, \ldots, a_{n-1}}) \ dx_n \tag{16}$$

полный интеграл.

Действительно, дифференцируя последнее равенство, восстанавливаем уравнения (15′), из которых получаем уравнения (15). Из последних следует, что (16) есть решение уравнения (14).

Так как возможность переписать уравнения (15′) в виде (15) говорит о том, что из уравнений (15′) можно найти $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, а уравнение (16) очевидно дает a, ясно, что (16) полный интеговл.

4) Если

$$\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$$

главные решения линейного однородного уравнения

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = 0, \tag{17}$$

отвечающие $x_1 = x_1^{(0)}$, т. е обращающиеся соответственно в $x_2, \ldots, x_n$ когда $x_1 = x_1^{(0)}$, то полный интеграл уравнения (17):

$$z = a + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 + \ldots + a_n \varphi_n.$$

Если

$$V_2, V_3, \ldots, V_n, V_0$$

главные решения уравнения

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + X \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

обращающиеся при $x_1 = x_1^{(0)}$ соответственно в $x_2, x_3, \ldots, x_n, z$, то полный интеграл уравнения

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = X \tag{17′}$$

получаем, найдя z из уравнения

$$V_0 = a + a_2 V_2 + a_3 V_3 + \ldots + a_n V_n.$$

При $x_1 = x_1^{(0)}$ последнее уравнение обращается в

$$z = a + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n;$$

следовательно, во-первых, из него можно найти z, во-вторых, найденное z, как замечено в прошлом параграфе, будет полным интегралом.

59. Нахождение по полному интегралу решений уравнения. Давая в равенстве (1) постоянным $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различные частные значения, мы будем получать различные решения уравнения (3).

Возникает вопрос, нельзя ли получить из (1) решения уравнения (3), заменяя $a_1, \ldots, a_n$ не постоянными, а функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Уравнение (3) получено путем исключения аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из уравнений (1) и (2). При таком исключении безразлично, что исключалось, постоянные или функции.

Значит, если мы подставим вместо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в (1) такие функции, чтобы уравнения (2) сохранили свой вид, то z, найденное из уравнения (1), попрежнему будут решением уравнения (3).

Выясним, какому условию должны удовлетворять эти функции $a_1, \ldots, a_n$, чтобы уравнения (2) сохранили свой вид.

Дифференцируя уравнение (1), имеем, не считая $a_1, a_2, \ldots, a_n$ постоянными и заменяя dz через

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n,$$

что

$$\begin{aligned} p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n &= \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n. \end{aligned} \tag{18}$$

Но в силу уравнений (2) члены в первой строке в (18) сокращаются. Значит функции $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0. \tag{NB}$$

Обратно, если соблюдено условие (NB), из равенства (18) вытекает, что уравнения (2) соблюдены. Значит условие (NB) необходимо и достаточно для того, чтобы (1) осталось решением уравнения (3).

Рассмотрим, какие заключения можно сделать о функциях $a_1, a_2, \ldots, a_n$ исходя от условия (NB).

Считая, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы можем условию (NB), выполняя дифференцирования, дать вид:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_1}\right) dx_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right) dx_n = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

откуда, пользуясь произвольностью дифференциалов независимых переменных, заключаем, что справедливы равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_2} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Трактуя равенства (20) как систему однородных уравнений относительно

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n},$$

заключаем, что или определитель из коэффициентов в уравнениях (20) равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial a_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial a_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial a_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial a_2}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

или справедливы равенства

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \ \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0. \tag{22}$$

Равенство нулю определителя (21) говорит, что функции $a_1, \ldots a_n$ связаны по крайней мере одной зависимостью вида

$$\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

Если вместе с определителем (21) равны нулю и все его миноры, то этих зависимостей может быть несколько.

Итак, если справедливо условие (№), то или справедливы зависимости

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \ \omega_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ &\ldots, \omega_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

число k которых равно одному из чисел $1, 2, \ldots, n$, или функции a_1, $a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют уравнениям (22).

Связав функции $a_1, a_2, \ldots, a_n$ условиями (23) и пользуясь уравнением (№), мы можем их, вообще говоря, найти.

Действительно, положим сначала, что уравнения (23) решены относительно k из функций $a_1, a_2, \ldots a_k$, имея, например, вид

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = \vartheta_1(a_{k+1}, \ldots, a_n), \ a_2 = \vartheta_2(a_{k+1}, \ldots, a_n), \\ &\ldots, a_k = \vartheta_k(a_{k+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}\right\} \tag{23'}$$

Подставляя эти значения $a_1, a_2, \ldots, a_k$ в уравнение (№) и приравнивая нулю коэффициенты при $da_{k+1}, \ldots, da_n$, мы получим сначала

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_{k+1}} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_k}\frac{\partial \vartheta_k}{\partial a_{k+1}} + \frac{\partial V}{\partial a_{k+1}}\right) da_{k+1} +$$
$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_{k+2}} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_k}\frac{\partial \vartheta_k}{\partial a_{k+2}} + \frac{\partial V}{\partial a_{k+2}}\right) da_{k+2} +$$
$$+ \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_n} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial a_n} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_k}\frac{\partial \vartheta_k}{\partial a_n} + \frac{\partial V}{\partial a_n}\right) da_n = 0$$

и затем

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial a_1}\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial a_{k+1}}+\ldots+\dfrac{\partial V}{\partial a_k}\dfrac{\partial \vartheta_k}{\partial a_{k+1}}+\dfrac{\partial V}{\partial a_{k+1}}=0\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \dfrac{\partial V}{\partial a_1}\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial a_n}+\ldots+\dfrac{\partial V}{\partial a_k}\dfrac{\partial \vartheta_k}{\partial a_n}+\dfrac{\partial V}{\partial a_n}=0.\end{array}\right\}\qquad(24)$$

Из уравнений (23′) и $n-k$ уравнений (24) можно, вообще говоря, найти все функции $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Искомое решение есть, следовательно, результат исключения параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из уравнения (1) при помощи уравнений (23′) и (24).

Заметим, что, подставив в (1) вместо $a_1, \ldots, a_k$ их значения (23′), мы получаем z в виде функции от $x_1, \ldots, x_n$ и параметров $a_{k+1}, \ldots, a_n$.

На полученное уравнение можно смотреть как на уравнение семейства поверхностей в пространстве $n+1$ измерений, зависящих от $n-k$ параметров.

При такой трактовке уравнения (1) искомое решение есть огибающая указанного семейства поверхностей. Действительно, уравнения (24) говорят, что точки

$$(x_1, \ldots, x_n, z)$$

поверхности (1), лежащие на поверхностях (24), принадлежат при наличии уравнений (23′) также и поверхностям семейства бесконечно близким к поверхности (1), а искомое решение есть геометрическое место этих точек.

Задание условия (№), значит, равносильно указанию, что искомое решение есть огибающая некоторого семейства поверхностей, определенного полным интегралом.

Если $n=2$, то при наличии одной зависимости между параметрами a_1, a_2 наше семейство поверхностей зависит от одного параметра.

В этом случае уравнения (1) и (24) принимают вид:

$$z=V(x_1, x_2, \vartheta(a_2), a_2), \quad \frac{\partial V}{\partial a_1}\vartheta'(a_2)+\frac{\partial V}{\partial a_2}=0$$

и определяют *линию — характеристику огибаемой* — а искомое решение — геометрическое место этих характеристик.

В случае, когда $n>2$, мы получаем решение как геометрическое место линий — многообразий одного измерения в пространстве $n+1$ измерений — только в том случае, когда число зависимостей (23′) равно единице. Если число зависимостей (23′) равно k, искомое решение есть геометрическое место многообразий измерения k; число уравнений (1) и (24) равно именно $n-k+1$ и, значит, число независимых переменных равно k.

Можно, конечно, определяя функции $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не отдавать с самого начала предпочтения некоторым из них и вести исключение методом неопределенных множителей. Дифференцируя уравнения (23), имеем:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial a_1}\,da_1+\frac{\partial\omega_1}{\partial a_2}\,da_2+\ldots+\frac{\partial\omega_1}{\partial a_n}\,da_n=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial\omega_k}{\partial a_1}\,da_1+\frac{\partial\omega_k}{\partial a_2}\,da_2+\ldots+\frac{\partial\omega_k}{\partial a_n}\,da_n=0.$$

Умножая последние уравнения последовательно на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и прибавляя к уравнению (№), получаем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}+\lambda_1\frac{\partial\omega_1}{\partial a_1}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial\omega_k}{\partial a_1}\right)da_1+\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}+\lambda_1\frac{\partial\omega_1}{\partial a_2}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\lambda_k\frac{\partial\omega_k}{\partial a_2}\right)da_2+\ldots+\left(\frac{\partial V}{\partial a_n}+\lambda_1\frac{\partial\omega_1}{\partial a_n}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial\omega_k}{\partial a_n}\right)da_n=0;$$

уравнение (№) будет соблюдено при наличии уравнений (23), если коэффициенты при $da_1, da_2, \ldots, da_n$ в последнем равенстве будут равны нулю.

Приравнивая их нулю, получаем:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial a_1}+\lambda_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial a_1}+\ldots+\lambda_k\dfrac{\partial\omega_k}{\partial a_1}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{\partial V}{\partial a_n}+\lambda_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial a_n}+\ldots+\lambda_k\dfrac{\partial\omega_k}{\partial a_n}=0.\end{array}\right\}\qquad(25)$$

Из k уравнений (23) и n уравнений (25) могут быть, вообще говоря, найдены функции $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Решение, получаемое из полного интеграла в предположении, что в (23) функции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ произвольны, называется *общим интегралом*.

Давая в общем интеграле функциям $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ частные значения, мы будем из общего интеграла получать различные частные решения.

Если функции $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдены из уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial a_2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial V}{\partial a_n}=0, \qquad (22)$$

то решение называется *особенным*.

Принимая во внимание сказанное выше об общем интеграле, можно сказать, что определенное нами теперь особенное решение есть огибающая семейства поверхностей (1), зависящих от n параметров.

Если вместо уравнения (1) мы выберем уравнение (1_1), дающее z неявно, то вспоминая, что уравнения (2) получаются из уравнений (2_1) исключением z при помощи уравнения (1_1), мы должны условие (18) заменить условиями

$$\left.\begin{aligned} &W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \\ &\frac{\partial W}{\partial z}(p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n) + \frac{\partial W}{\partial x_1} dx_1 + \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial W}{\partial a_1} da_1 + \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial a_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial x_n} dx_n = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (18_1)$$

что приводит к заключению, что условие (N B) равносильно условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial W}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial W}{\partial a_n} da_n = 0 \\ &W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (NB_1)$$

Уравнения (22) для нахождения особенных решений должны быть заменены уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial a_n} = 0 \\ &W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (22_1)$$

так как при наличии уравнения (1_1) мы, очевидно, имеем

$$\frac{\partial W}{\partial z} \; \frac{\partial V}{\partial a_i} + \frac{\partial W}{\partial a_i} = 0.$$

Ясно, что в случае уравнения вида (1_1) в виду того, что в окончательной системе уравнение (1_1), сохраняется, уравнения (24) можно заменить уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial a_1} \; \frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_{k+1}} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial a_k} \; \frac{\partial \vartheta_k}{\partial a_{k+1}} + \frac{\partial W}{\partial a_{k+1}} = 0 \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\frac{\partial W}{\partial a_1} \; \frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_n} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial a_k} \; \frac{\partial \vartheta_k}{\partial a_n} + \frac{\partial W}{\partial a_n} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24_1)$$

60. Об общем интеграле. Сказанное в прошлом параграфе может навести на мысль, что неособенные решения уравнения (3) могут быть разных родов: решения, получаемые, когда число k зависимостей (23) равно 1, 2, ..., n. Но такое разделение было бы неправильным. Каждое решение может оказаться решением любого рода, смотря по тому, каков исходный полный интеграл.

Последнее обстоятельство подтверждается следующим примером. Возьмем уравнение

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3. \tag{26}$$

Уравнению (26) удовлетворяет, как не трудно убедиться, функция

$$z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{27}$$

Уравнение (26) частный случай обобщенного уравнения Клеро. Его полный интеграл

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3. \tag{28}$$

Чтобы найти значения a_1, a_2, a_3, при которых z, найденное из (28), обращается в (27), пользуемся уравнениями

$$p_1 = a_1,\ p_2 = a_2,\ p_3 = a_3.$$

Подставляя в них вместо p_1, p_2, p_3 их значения, найденные дифференцированием (27), получаем

$$a_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},\quad a_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$a_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

откуда

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1. \tag{29}$$

Итак, a_1, a_2, a_3 связаны одной зависимостью.

Но нетрудно убедиться, что за полный интеграл уравнения (26) можно взять еще равенство:

$$z = a_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + a_2 x_2 + a_3 x_3. \tag{28$_1$}$$

Действительно, имеем

$$\left.\begin{aligned} p_1 = a_1 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},\quad p_2 = a_1 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + a_2,\\ p_3 = a_1 \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + a_3. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Подставляя в уравнение (26) вместо z его значение (28_1), а вместо p_1, p_2, p_3 их значения (30), мы получаем тожество; z действительно решение уравнения (26). При этом из уравнений (30) можно найти последовательно a_1, a_2, a_3; значит (28_1) полный интеграл.

Заменяя в (30) p_1, p_2, p_3 производными от функции (27), получаем уравнения:

$$a_1 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$a_1 \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + a_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$a_1 \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + a_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

из которых находим:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0.$$

Итак, чтобы получить решение (27), надо в полном интеграле (28_1) связать a_1, a_2, a_3 тремя зависимостями.

Наконец, за полный интеграл уравнении (26) можно взять равенство

$$z = a_1\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - \sqrt{x_2^2 + x_3^2}\right) + a_2x_2 + a_3x_3. \quad (28_2)$$

Действительно, имеем:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{a_1x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad p_2 = \frac{a_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} - \frac{a_1x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} + \\ &+ a_2, \quad p_3 = \frac{a_1x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} - \frac{a_1x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} + a_3. \end{aligned}\right\} \quad (30')$$

Подставляя в (26) вместо z, p_1, p_2, p_3 их значения (28_2) и (30′), получаем тожество; значит z действительно решение уравнения (26); при этом из уравнений (30′) можно последовательно найти a_1, a_2, a_3; значит z полный интеграл.

Заменяя в (30′) p_1, p_2, p_3 производными от функции (27), получаем уравнения

$$\frac{a_1x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\frac{a_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} - \frac{a_1x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} + a_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$$

$$\frac{a_1x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} - \frac{a_1x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} + a_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Первое из них дает $a_1 = 1$; подставляя это значение в последние два, имеем:

$$a_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, \quad a_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}},$$

откуда

$$a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

Итак, чтобы получить решение (27), надо в полном интеграле (28_2) связать a_1, a_2, a_3 двумя зависимостями.

Для примера восстановим решение (27) из полного интеграла (28), пользуясь зависимостью (29).

Применяя формулы (25), мы должны к зависимости (29) присоединить уравнения

$$x_1 + 2\lambda a_1 = 0, \quad x_2 + 2\lambda a_2 = 0, \quad x_3 + 2\lambda a_3 = 0,$$

из которых

$$a_1 = -\frac{x_1}{2\lambda}, \quad a_2 = -\frac{x_2}{2\lambda}, \quad a_3 = -\frac{x_3}{2\lambda}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4\lambda^2,$$

и, окончательно,

$$a_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad a_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$a_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Подставляя эти значения в (28), мы получаем решение (27).

Рассмотрим еще несколько примеров, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1) Мы видели, что полный интеграл уравнения

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 - \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \tag{11'}$$

равен

$$z = x_1 a_1 + x_2 a_2 - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2). \tag{12'}$$

Найдем то решение уравнения, в котором

$$a_1^2 + a_2^2 - 1 = 0. \tag{31}$$

Записывая, что производные от (12') по a_1 и a_2 пропорциональны производным по a_1 и a_2 от левой части (31), имеем:

$$\frac{x_1 - a_1}{a_1} = \frac{x_2 - a_2}{a_2} = \lambda - 1, \quad \lambda = \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}.$$

Подставляя значения a_1 и a_2 в (31), получаем:

$$\lambda = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad a_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad a_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

откуда после подстановки в (12') находим:

$$z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{2}. \tag{32}$$

2) Приравняв нулю частные производные от (12') по a_1 и a_2, находим

$$x_1 - a_1 = 0, \quad x_2 - a_2 = 0.$$

Подставляя найденные значения a_1 и a_2 в (12'), находим особенное решение уравнения (11')

$$z = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \tag{33}$$

61. Характеристические линии. Переходя к задаче нахождения решений по данным начальным условиям, мы рассмотрим сначала случай уравнения с двумя независимыми переменными:

$$f(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0. \tag{34}$$

Найти решение этого уравнения, значит найти поверхность в пространстве трех измерений.

Положим, что

$$z = V(x_1, x_2, a_1, a_2) \tag{35}$$

полный интеграл уравнения (34). Исключая a_1 и a_2 из уравнения (35) и уравнений

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \tag{36}$$

мы восстанавливаем уравнение (34). Значит, безразлично, задать уравнение (4) или уравнения (35) и (36); то и другое задание определяют одну и ту же зависимость между x_1, x_2, z, p_1, p_2 и, значит, те же поверхности в пространстве трех измерений.

Положим теперь, что дано неособенное решение

$$z = \Phi(x_1, x_2), \tag{37}$$

которое можно восстановить из полного интеграла (35), связав a_1 и a_2 одной или двумя зависимостями, и выбирая, в случае надобности, подобающую ветвь функции (35). Рассмотрим сначала случай, когда решение (37) получается установлением одной зависимости

$$a_2 = \varphi(a_1), \tag{38}$$

где φ некоторая функция; ее можно найти, подставляя в (35) и (36) вместо z его значение (37) и исключая из результатов x_1 и x_2. Для нахождения a_1 и a_2 при наличии зависимости (38) надо, по сказанному в § 59, присоединить к уравнениям (35) и (36) уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} + \frac{\partial V}{\partial a_2} \varphi'(a_1) = 0.$$

Исключение a_1 и a_2 из этих трех уравнений даст уравнение (37). Значит безразлично, задать уравнение (37) или уравнения

$$\left.\begin{aligned} z &= V(x_1, x_2, a_1, a_2) \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} &+ \frac{\partial V}{\partial a_2} \varphi'(a_1) = 0 \\ a_2 &= \varphi(a_1) \end{aligned}\right\} \tag{37$_1$}$$

Мы дадим системе (37$_1$) более симметричный вид, вводя в рассмотрение еще один параметр и еще одно уравнение. Очевидно, что система

$$\left.\begin{aligned} z &= V(x_1, x_2, a_1, a_2) \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} &+ \frac{\partial V}{\partial a_2} c = 0 \\ a_2 &= \varphi(a_1) \\ c &= \varphi'(a_1) \end{aligned}\right\} \tag{37$_2$}$$

вполне равносильна системе (37$_1$), а также уравнению (37): исключение из нее a_1, a_2, c также приводит к уравнению (37).

Приступая к такому исключению, мы можем сначала исключить из первых двух уравнений a_2 и с. Положим, что мы получим

$$\left.\begin{aligned} z = V(x_1,\ x_2,\ a_1,\ \varphi(a_1)) \\ \omega(x_1,\ x_2,\ a_1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Исключение из этих двух уравнений a_1 даст поверхность (37). Но уравнения (39) при всяком a_1 определяют некоторую кривую в пространстве, и если считать в них a_1 произвольным параметром, то они определяют семейство кривых, зависящих от одного параметра.

Кривые семейства (39) мы назовем *характеристическими линиями* решения (37). Так как уравнение (37) получается исключением a_1 из уравнений (39), поверхность (37) есть геометрическое место кривых (39) и, значит, каждая характеристическая линия решения лежит на поверхности (37).

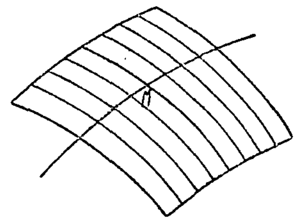

Рис. 2.

Сопоставляя сказанное теперь со сказанным в § 59, мы имеем: решение (37) есть огибающая семейства поверхностей, зависящих от одного параметра, в котором характеристики суть характеристические линии решения (37).

Рассмотрим систему из первых двух уравнений (37_2):

$$\left.\begin{aligned} z = V(x_1,\ x_2,\ a_1,\ a_2) \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} + c\frac{\partial V}{\partial a_2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Эти уравнения определяют семейство кривых, зависящих от трех параметров.

Мы назовем кривые этого семейства *характеристическими линиями* уравнения (34).

Примечание. Мы имеем дело в (40) действительно с тремя независимыми параметрами. Если бы второе уравнение (40) удовлетворялось тожественно значением c, равным функции от a_1 и a_2, то мы могли бы написать тожества:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial x_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial x_1}c \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2\,\partial x_2}c \equiv 0.$$

Когда уравнение (34) зависит от z, из этих тожеств вытекает невозможный результат:

$$\frac{D\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right)}{D(a_1,\ a_2)} \equiv 0;$$

если z не входит явно в (34), одна из постоянных, скажем a_2, аддитивная, и написанное тожество говорит, что $\dfrac{\partial V}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial V}{\partial x_2}$ одновременно не зависят от a_1, что также невозможно.

Из этого заключаем, между прочим, что уравнения (40) действительно определяют линию.

По этим определениям характеристические линии уравнения принадлежат семейству, зависящему от трех параметров, а характеристические линии решения уравнения — семейству, зависящему от одного параметра. Чтобы из семейства характеристических линий уравнения получить семейство характеристических линий решения, надо два параметра выразить через третий или связать все три параметра двумя зависимостями.

Эти две зависимости, однако, нельзя выбирать совершенно произвольно. Присоединив к уравнениям (40) еще два уравнения, связывающие a_1, a_2, c, мы из трех последних уравнений полученной системы найдем a_1 и a_2 в виде функций от x_1 и x_2. Для того чтобы после подстановки в первое уравнение (40) этих функций получилось решение уравнения, необходимо, чтобы было соблюдено условие

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 = 0. \tag{№}$$

Например, если мы положим

$$a_2 = \varphi(a_1), \quad c = \psi(a_1),$$

второе из уравнений (40) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} + \psi(a_1) \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0.$$

Условие (№) дает

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} + \varphi'(a_1) \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0.$$

Отсюда, так как $\frac{\partial V}{\partial a_1}$ и $\frac{\partial V}{\partial a_2}$ одновременно не равны нулю вследствие задания, что решение (37) не особенное (так как предпочтение, оказанное нами параметру a_1 перед параметром a_2, ничем до сих пор не обусловлено, мы можем считать, что $\frac{\partial V}{\partial a_2} \neq 0$) вытекает

$$\psi(a_1) = \varphi'(a_1).$$

Если a_1 и a_2 связаны в решении (37) двумя зависимостями, они оба постоянны; уравнение характеристических линий такого решения

$$z = V(x_1, x_2, a_1, a_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} + c\frac{\partial V}{\partial a_2} = 0,$$

где a_1, a_2 постоянны, а c переменный параметр.

Заменив уравнение (35) уравнением

$$W(x_1, x_2, z, a_1, a_2) = 0,$$

мы, вспоминая сказанное в § 59, можем заменить уравнения (40) уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &W(x_1, x_2, z, a_1, a_2)=0 \\ &\frac{\partial W}{\partial a_1}+c\frac{\partial W}{\partial a_2}=0 \end{aligned}\right\} \tag{40_1}$$

Заметим, впрочем, что все рассуждения этого параграфа мы могли бы провести, исходя от уравнения (35_1).

62. Уравнения характеристических линий. Пользуясь определениями, данными в прошлом параграфе, можно думать, что состав семейства характеристических линий уравнения или решения зависит от выбранного полного интеграла. Однако это не так: выбором интеграла обусловливается только выбор параметров семейства и, следовательно, только выбор элементов, характеризующих отдельные линии.

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что характеристические линии определяются интегралами некоторой системы уравнений, вид которой совершенно не зависит от формы выбранного полного интеграла, но только от данного уравнения.

Отыскивая направляющие коэффициенты касательной к выбранной характеристической линии, находим, дифференцируя уравнения (40)

$$\left.\begin{aligned} &dz=\frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}dx_2 \\ &\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\partial x_1}+c\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\partial x_1}\right)dx_1+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\partial x_2}+c\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\partial x_2}\right)dx_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Так как первое из уравнений (40) есть полный интеграл уравнения (34), то справедливо тожество

$$f\left(x_1, x_2, V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}\right)\equiv 0; \tag{42}$$

дифференцируя его по a_1 и a_2, имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial a_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\partial x_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\partial x_2}\equiv 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial a_2}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\partial x_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial a_2\partial x_2}\equiv 0,$$

где знаками

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\quad \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right),\quad \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right),$$

мы обозначаем результат замены аргументов z, p_1, p_2 через

$$V,\ \frac{\partial V}{\partial x_1},\ \frac{\partial V}{\partial x_2}.$$

Умножая второе из тожеств на c и складывая с первым, находим, пользуясь вторым из уравнений (40), что на выбранной линии:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_1}+c\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_2}+c\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial x_2}\right)=0. \tag{43}$$

Сравнение (43) со вторым уравнением (41) дает

$$\frac{dx_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}=\frac{dx_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)}, \tag{44}$$

если, конечно, оба исключенные коэффициенты не равны одновременно нулю; в последнем, исключенном нами, случае во взятой точке (x_1, x_2, z) на характеристической линии нельзя провести к ней определенной касательной.

Обозначая временно через z, p_1, p_2 значения V, $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $\frac{\partial V}{\partial x_2}$ на изучаемой линии, дифференцируем тожество (42) по x_1 и x_2:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}=0\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}=0;\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

вследствие сделанного условия о значениях z, p_1 и p_2 использование обозначений $\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)$ делается излишним. Но из (44) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}=\lambda\, dx_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=\lambda\, dx_2,$$

если $\frac{1}{\lambda}$ знаменатель отношения (44). Подставляя эти значения в (45), находим

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial z}p_1+\lambda\, dp_1=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial z}p_2+\lambda\, dp_2=0,$$

откуда, по сравнению с (44) и с первым уравнением (41), получаем

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial f}{\partial p_2}}=-\frac{dp_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{dp_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial p_1}p_1+\frac{\partial f}{\partial p_2}p_2} \tag{44$_1$}$$

К этим уравнениям должно быть присоединено уравнение

$$f(x_1, x_2, z, p_1, p_2)=0, \tag{34}$$

связывающее те же элементы и использованное при выкладках.

Не трудно убедиться, что равенство

$$f(x_1, x_2, z, p_1, p_2)=h \tag{46}$$

один из интегралов системы; непосредственное дифференцирование (46) и исключение дифференциалов $dx_1, \ldots, dz$ при помощи (44_1) дает, именно, тожество. Следовательно, подстановка в функцию $f(x_1, x_2, z, \rho_1, \rho_2)$ вместо x_2, z, ρ_1, ρ_2 их общих значений, найденных интегрированием системы (44_1), дает постоянное, которое на характеристических линиях должно быть нулем. Отсюда ясно, что четыре постоянные, вводимые интегрированием системы (44_1), связаны одной зависимостью и что общее решение уравнений (44_1) и (34) зависит от трех произвольных постоянных так же, как и линии семейства (40).

На данном неособенном решении уравнения (34) $V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}$, имеют значения, которые могут быть вычислены по решению, не прибегая к помощи полного интеграла. Значит, как только дано решение, коэффициенты уравнения (44) определены; уравнению же (44) удовлетворяют характеристические линии решения. Отсюда вытекает, что характеристические линии решения могут быть найдены интегрированием соответственного уравнения (44); в качестве удовлетворяющих уравнению (44) они зависят от одного параметра. Самые уравнения характеристических линий решения мы получим присоединением уравнения интегральной поверхности к интегралу уравнения (44).

63. Интегральный элемент. Когда дана *интегральная поверхность* — решение уравнения (34) — то всякая точка ее определяет не только три ее координаты x_1, x_2, z, но также и коэффициенты касательной плоскости к интегральной поверхности, т. е. производные ρ_1 и ρ_2 от z по x_1 и x_2; эти пять чисел связаны уравнением (34).

Совокупность пяти чисел

$$M^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}, \rho_1^{(0)}, \rho_2^{(0)})$$

называется *интегральным элементом*, если эти пять чисел связаны соотношением

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) = 0. \tag{34_1}$$

Теорема 1. *По интегральному элементу $M^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \rho_2^{(0)})$ можно, вообще говоря, найти проходящую через точку $m(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)})$ характеристическую линию некоторого решения, содержащего элемент $M^{(0)}$.*

Положим, что

$$\left.\begin{aligned} & z = V(x_1, x_2, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) \\ & \frac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}} + c^{(0)} \frac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

уравнения искомой характеристической линии; мы обозначаем через

$a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$ искомые значения ее параметров; знаками $\dfrac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}}$, $\dfrac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}}$ мы обозначаем результаты замены в производных $\dfrac{\partial V}{\partial a_1}$, $\dfrac{\partial V}{\partial a_2}$ параметров a_1 и a_2 этими их значениями.

Каковы бы ни были $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$, можно построить функцию

$$a_2 = \varphi(a_1),$$

удовлетворяющую условиям

$$a_2^{(0)} = \varphi(a_1^{(0)}),\ c^{(0)} = \varphi'(a_1^{(0)})$$

и, найдя a_1, a_2 по условию

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 = 0, \tag{N3}$$

найти решение

$$z = V(x_1,\ x_2,\ a_1,\ a_2). \tag{48}$$

Так как должно быть

$$\left.\begin{aligned} z^{(0)} &= V(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ a_1^{(0)},\ a_2^{(0)}) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 &+ c^{(0)}\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{47$_1$}$$

где скобками обозначен результат замены аргументов x_1, x_2, a_1, a_2 числами $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, одно из значений функции a_1 в точке m равно $a_1^{(0)}$ и, значит, соответственные значения a_2 и c в этой точке равны $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$.

На решении (48) вследствие условия (N3)

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_2}$$

и, значит, должно быть

$$\left.\begin{aligned} p_1^{(0)} &= \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0,\ p_2^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 \\ z^{(0)} &= V(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ a_1^{(0)},\ a_2^{(0)}) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Примечание. Выбрав для определения полного интеграла уравнение (35_1), мы могли бы вместо уравнений (47) взять уравнения

$$\left.\begin{aligned} W(x_1, x_2, z, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial a_1^{(0)}} + c^{(0)}\frac{\partial W}{\partial a_2^{(0)}} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{47$_2$}$$

что привело бы к замене уравнений (49) уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)p_1^{(0)}+\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)=0,\ \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)p_2^{(0)}+\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)=0\\ W(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ z^{(0)},\ a_1^{(0)},\ a_2^{(0)})=0.\end{aligned}\right\}\qquad (49_1)$$

Уравнения (49) не зависят от того, какова функция φ и составленное решение, и вполне определены заданием интегрального элемента. Пользуясь уравнениями (49) — следствиями задания, что характеристическая линия принадлежит решению — мы можем, вообще говоря, найти $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$. Мы говорим „вообще говоря“, так как в уравнениях (49) вместо x_1, x_2, p_1, p_2, z подставлены частные значения; если бы эти аргументы оставались произвольными, можно было бы наверное найти $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ по определению полного интеграла. Найдя $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, мы можем, вообще говоря, найти $c^{(0)}$ из второго уравнения (47_1):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0+c^{(0)}\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0=0. \qquad (50)$$

Мы не могли бы найти $c^{(0)}$ только в том случае, когда оба коэффициента $\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0$ равны нулю.

Найдя $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$ и составив уравнения (47), получаем некомую характеристическую линию.

Если по интегральному элементу $M^{(0)}$ нельзя найти характеристической линии решения, то мы назовем его особенным.

Мы наталкиваемся на особенный элемент $M^{(0)}$, например, если он принадлежит особенному решению. В этом случае

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0=0,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0=0$$

и нельзя найти $c^{(0)}$, когда определитель

$$\left(\frac{D\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\ \frac{\partial V}{\partial x_2}\right)}{D(a_1,\ a_2)}\right)_0$$

обращается в нуль на основании уравнений (49) и так далее.

Про найденную характеристическую линию (47) условимся говорить, что она проходит через элемент $M^{(0)}$.

Мы подчеркнули выше, что уравнения (49) не зависят от того, какова функция φ и составленное решение, но вполне определены заданием интегрального элемента. Значит, если можно найти определенную характеристическую линию, проходящую через элемент, то она будет принадлежать всем решениям, имеющим элемент $M^{(0)}$.

Это приводит нас к следующему следствию теоремы 1: *Если два решения имеют общий неособенный интегральный элемент, то они имеют общую характеристическую линию, проходящую через этот элемент. Интегральные поверхности, отвечающие этим решениям, касаются друг друга вдоль этой линии.* Последнее ясно из следующего соображения: если

$$z = V(x_1, x_2, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}),\ z = V(x_1, x_2, a_1^{(2)}, a_2^{(2)})$$

эти решения, то при $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$ функции $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$ и $a_2^{(1)}$, $a_2^{(2)}$ обращаются соответственно в $a_1^{(0)}$ и $a_2^{(0)}$ и сохраняют эти значения вдоль характеристической линии. Но тогда производные z от x_1 и x_2 вследствие условия (№) соответственно равны между собой вдоль характеристической линии для обоих решений.

64. Интеграл $M^{(1)}$. Положим, что $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, z_0, $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$ функции одного параметра t:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(0)} = \varphi_1(t),\ x_2^{(0)} = \varphi_2(t),\ z^{(0)} = \varphi(t) \\ p_1^{(0)} = \psi_1(t),\quad p_2^{(0)} = \psi_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Собрание чисел

$$M^{(1)}\ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z_0, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}), \tag{52}$$

зависящих от одного параметра, называется интегралом $M^{(1)}$ *уравнения* (34), *если оно удовлетворяет двум условиям*:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) = 0 \\ dz^{(0)} = p_1^{(0)}\,dx_1^{(0)} + p_2^{(0)}\,dx_2^{(0)} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Кривую

$$x_1^{(0)} = \varphi_1(t),\ x_2^{(0)} = \varphi_2(t),\ z^{(0)} = \varphi(t), \tag{51$_1$}$$

уравнение которой дано первыми тремя равенствами (51), *называют основанием интеграла* $M^{(1)}$.

За основание интеграла $M^{(1)}$ может быть взята точка; если $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $z^{(0)}$ постоянные, то второе из условий (53) соблюдено само собой: первое, устанавливая только одну зависимость между $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, дает один из этих аргументов в функции другого, который можно взять за параметр.

Задание интеграла $M^{(1)}$ определяет некоторую ориентацию интегральных элементов вдоль основания.

Теорема 2. *По основанию* (51$_1$) *можно, вообще говоря, найти интеграл* $M^{(1)}$.

Когда дано основание, три из пяти элементов интеграла $M^{(1)}$ известны; остается найти два последние $p_1^{(0)}$ и $p_2^{(0)}$. Но первое из условий (53):

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}\ p_2^{(0)}) = 0, \tag{53$_1$}$$

дает одну зависимость между ними. Подставляя вместо $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $z^{(0)}$ их значения во вторую зависимость (53), получаем по сокращении на dt:

$$\varphi'(t) = p_1^{(0)} \varphi_1'(t) + p_2^{(0)} \varphi_2'(t). \tag{53_2}$$

Из уравнений (53_1) и (53_2) можно, вообще говоря, найти $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$. При решении системы из уравнений (53_1) и (53_2) имеет значение изучение якобиана

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\right)_0, & \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_2}\right)_0 \\ dx_1^{(0)}, & dx_2^{(0)} \end{vmatrix}. \tag{54}$$

Если этот якобиан не равен нулю на основании указанных уравнений, то можно подобрать числа $p_1^{(*)}$, $p_2^{(*)}$, t_0, при которых соблюдены уравнения (53_1), (53_2), но якобиан не равен нулю. В этом случае система уравнений (53_1) и (53_2) имеет решение, в котором значения $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$ равны $p_1^{(*)}$, $p_2^{(*)}$ при $t = t_0$.

Оставляя в стороне случай, когда из уравнений (53_1) и (53_2) нельзя найти конечных или голоморфных на линии (51_1) значений $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, который мы назовем исключительным, отметим случай, когда при решении этих уравнений одно из $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$ остается произвольным, между тем как основание отлично от точки; а также случай, когда голоморфные значения $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, удовлетворяя уравнениям (53_1) и (53_2), обращают в нуль якобиан (54). Эти случаи мы назовем характеристическими. В первом из них мы не находим интеграла $M^{(1)}$, но находим $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $z^{(0)}$, $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, удовлетворяющие условиям (53), но зависящие от двух параметров. Из сказанного в § 62 ясно, что мы имеем дело со вторым случаем, если основание (51) характеристическая линия.

З а м е ч а н и е. Если уравнение (34) не линейное относительно производных p_1 и p_2, то при решении относительно некоторой производной мы получаем, вообще говоря, несколько различных значений. Как и в теории обыкновенных уравнений, во многих вопросах не формального характера, равенства, дающие различные значения производной, надо трактовать как различные уравнения, имеющие независимо друг от друга решения, отвечающие поставленным требованиям. С этим обстоятельством мы сталкиваемся, решая совместно уравнения (53_1) и (53_2); выбор решения этих двух уравнений может быть равносилен выбору одного из указанных уравнений.

Следует заметить, что при пользовании уравнением полного интеграла в виде (1), избрание ветви функции V может обусловить выбор уравнения и, обратно, выбор уравнения обусловливает выбор ветви V.

65. Интеграл $M^{(2)}$. Обобщая сказанное, можно назвать интегралом $M^{(2)}$ совокупность значений $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $z^{(0)}$, $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, если она зависит от двух параметров и если она удовлетворяет двум условиям (53).

Если найдено решение уравнения (34), то найден интеграл $M^{(2)}$. Действительно, если

$$z = \Phi(x_1, x_2)$$

решение уравнения (34), то

$$x_1^{(0)} = u, \quad x_2^{(0)} = v, \quad z^{(0)} = \Phi(u, v), \quad p_1^{(0)} = \Phi'_{x_1}(u, v), \quad p_2^{(0)} = \Phi'_{x_2}(u, v)$$

образуют интеграл $M^{(2)}$.

Заметим, однако, что задача найти решение уравнения (34) и найти интеграл $M^{(2)}$ не тожественны.

Если найдены все интегралы $M^{(2)}$, то найдены и все решения уравнения, но не наоборот; не всякий интеграл $M^{(2)}$, именно, определяет некоторое решение. Например, равенства

$$z = 0, \; x_1 = u, \; x_2 = 0, \; p_1 = 0, \; p_2 = v$$

образуют интеграл $M^{(2)}$ уравнения

$$x_1 p_1 - x_2 p_2 = 0,$$

но не дают его решения, так как обе производные от функции $z = 0$ равны нулю.

66. Задача Коши. Сказанное в прошлых параграфах позволяет решить задачу Коши. Дано уравнение

$$f(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0 \tag{34}$$

и кривая

$$x_1 = \varphi(t), \; x_2 = \psi(t), \; z = \chi(t); \tag{55}$$

найти интегральную поверхность уравнения (34), заключающую кривую (55). Если существует решение задачи, то искомая интегральная поверхность содержит линию (55), и можно для каждой точки линии (55) найти интегральный элемент, совокупность которых образует интеграл $M^{(1)}$. Через каждый такой интегральный элемент проходит характеристическая линия, принадлежащая искомому решению, которая, если (55) не есть эта самая линия, отлична от (55).

Таким образом характеристические линии, проходящие через интегральные элементы, связанные с кривой (55), образуют семейство характеристических линий решения, а самое решение — их геометрическое место.

Этот обзор приводит к правилу: найдя интеграл $M^{(1)}$ по основанию (55), через каждый интегральный элемент этого интеграла провести характеристическую линию и найти таким образом семейство характеристических линий.

Искомая поверхность, если она существует, должна быть геометрическим местом характеристических линий указанного семейства.

Соберем, для удобства, в одно место все необходимое для проведения указанных действий.

Для нахождения интеграла $M^{(1)}$, решим совместно уравнения

$$x_1^{(0)} = \varphi(t), \quad x_2^{(0)} = \psi(t), \quad z^{(0)} = \chi(t) \tag{55}$$

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) = 0 \tag{34}$$

$$\chi'(t) = p_1^{(0)}\varphi'(t) + p_2^{(0)}\psi'(t). \tag{56}$$

Для нахождения параметров $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$ семейства характеристических линий искомого решения ищем их из уравнений

$$z^{(0)} = V(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, a_1^{(0)}, a_2^{(2)}), \ p_1^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0, \ p_2^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0, \tag{57}$$

из которых одно следствие двух других и уравнения

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 + c^{(0)}\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0 = 0. \tag{57$_1$}$$

Эти уравнения дают решение каждый раз, когда элемент $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)})$ не особенный.

Составив затем уравнения характеристических линий

$$\left.\begin{aligned} & z = V(x_1, x_2, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) \\ & \frac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}} + c^{(0)}\frac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

исключаем параметр t.

Уравнения (57), (57$_1$) можно, конечно, заменить уравнениями

$$W(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 p_1^{(0)} + \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 p_2^{(0)} + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right)_0 + c^{(0)}\left(\frac{\partial W}{\partial a_2}\right)_0 = 0,$$

не предрешая таким образом выбора ветви функции V, заменив уравнения (47) уравнениями

$$\left.\begin{aligned} & W(x_1, x_2, z, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) = 0 \\ & \frac{\partial W}{\partial a_1^{(0)}} + c^{(0)}\frac{\partial W}{\partial a_2^{(0)}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{47$_1$}$$

Из сказанного, однако, только вытекает, что решение будет нами найдено, если задача имеет определенное решение.

Но если даже допустить, что указанный прием всегда приводит к нахождению некоторой поверхности, останется открытым вопрос, всегда ли будет эта поверхность интегральной, т. е. означает ли возможность найти z из уравнений (47), что задача имеет решение.

Для исключения t из уравнений (47), если $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ зависят от t, второе из уравнений (47) должно зависеть от t.

Если оно зависит от t, то оно определяет t как функцию от x_1 и x_2 и, значит, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ как функции от этих переменных. Чтобы убедиться, что результат исключения t приводит к решению, остается, следовательно, проверить, соблюдено ли условие

$$\frac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}}\, da_1^{(0)} + \frac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}}\, da_2^{(0)} = 0. \qquad (\text{№})$$

Дифференцируя первое из тожеств (57), имеем

$$dz^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 dx_1^{(0)} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 dx_2^{(0)} + \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 da_1^{(0)} + \left(\frac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}}\right)_0 da_2^{(0)}. \quad (58)$$

Так как последние два тожества (57) дают

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 = p_1^{(0)}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 = p_2^{(0)},$$

а благодаря уравнению (56)

$$dz^{(0)} = p_1^{(0)}\, dx_1^{(0)} + p_2^{(0)}\, dx_2^{(0)},$$

из (58) заключаем, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 da_1^{(0)} + \left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0 da_2^{(0)} = 0.$$

Сравнение этого уравнения с уравнением (57_1) дает

$$c^{(0)} = \frac{da_2^{(0)}}{da_1^{(0)}};$$

подстановка же этого значения $c^{(0)}$ во второе из уравнений (47) дает непосредственно условие (№).

Составленная интегральная поверхность заключает кривую (55), так как при построении кривых (47) мы проводим кривую через каждую точку кривой (55), а найденная поверхность их геометрическое место.

67. Исключительные случаи задачи Коши. Разберем теперь случаи, в которых указанный прием может не приводить к решению задачи.

Положим, сначала, что второе из уравнений (47) не содержит t. Тогда возможно одно из двух: или первое уравнение (47) также не зависит от t и уравнения (47) определяют кривую, которая, имея общую точку с каждой точкой кривой (55), с нею совпадает, или первое уравнение зависит от t и результатом исключения является второе уравнение, а уравнения (47) не определяют z как функцию от x_1 и x_2.

Не трудно убедиться, что при обнаружении каждого из указанных двух обстоятельств, мы имеем дело с характеристическим случаем.

Действительно, если второе уравнение (47) не зависит от t, то, трактуя в нем x_1 и x_2 как произвольные, а $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$ как функции от t, дифференциал его левой части тожественно нуль:

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}}+c^{(0)}\frac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}}\right)\equiv 0; \tag{59}$$

значит нуль и то, что мы получим из найденного дифференциала, заменив x_1 и x_2 через $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$.

Вследствие указанного следствия тожества (59), дифференцирование тожества (57_1) дает равенство

$$\left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_1}\right)_0+c^{(0)}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial x_1}\right)_0\right)dx_1^{(0)}+\left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_2}\right)_0+\right.$$
$$\left.+c^{(0)}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial x_2}\right)_0\right)dx_2^{(0)}=0, \tag{41_1}$$

совершенно аналогичное встречавшемуся в § 62. Если, однако, z, x_1, x_2 связаны уравнениями (47), то тожество (43) § 62 имеет место, принимая теперь вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^{(0)}\partial x_1}+c^{(0)}\frac{\partial^2 V}{\partial a_2^{(0)}\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^{(0)}\partial x_2}+c^{(0)}\frac{\partial^2 V}{\partial a_2^{(0)}\partial x_2}\right)=0, \tag{43_1}$$

где p_1 и p_2 производные от z, данной первым уравнением (47), а $\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)$ результаты замены z, p_1 p_2 этими их значениями. Значит имеем также

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_0\left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_1}\right)_0+c^{(0)}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial x_1}\right)_0\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_0\left(\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_2}\right)_0+c^{(0)}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial x_2}\right)_0\right)=0. \tag{$43_1'$}$$

Совместное же существование тожеств (41_1) и ($43_1'$) приводит к заключению, как и в § 62, что

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_0, & \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_0 \\ dx_1^{(0)}, & dx_2^{(0)} \end{vmatrix}=0$$

что и требовалось доказать.

Пересмотрим, в заключение, все обстоятельства, могущие воспрепятствовать составлению уравнений (47).

Прежде всего, при составлении интеграла $M^{(1)}$ надо считаться с возможностью появления исключительного случая, когда значения $p_1^{(0)}$ и $p_2^{(0)}$ не ограничены или не голоморфны, и случая характеристического, когда вместо интеграла $M^{(1)}$ мы можем натолкнуться на интеграл $M^{(2)}$.

Оставляя в стороне эти случаи, мы должны отметить следующие. Во-первых, если все интегральные элементы, основание которых (55), особенные, мы не решим задачи Коши, не будучи в состоянии найти $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$. Это, например, имеет место, если кривая (55) лежит на особенном решении, соответствующем выбранному полному интегралу уравнения (34).

Во-вторых, линия (55) может быть одной из характеристических линий. Вычисляя $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$, мы ее восстановим, если не натолкнемся на указанный выше характеристический случай, и восстановим только самую линию.

Задача допускает тогда множество решений: достаточно кривую (55) в какой-нибудь ее точке t_0 пересечь кривой

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \psi_1(t),\ z = \chi_1(t), \tag{60}$$

выбранной произвольно, но так однако, чтобы интегральные элементы для точки $t = t_0$ у кривых (55) и (60) были одинаковы, т. е. чтобы значения $p_1^{(0)}$ и $p_2^{(0)}$, вычисленные для различных оснований, при $t = t_0$ были одинаковы. Тогда характеристическая линия (55) будет лежать на поверхности, заключающей кривую (60), по следствию теоремы 1.

68. **Примеры.** 1) Найти то решение уравнения

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 - \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2), \tag{61}$$

в котором

$$\text{при } x_1 + x_2 = 0:\quad z = \frac{1}{2} x_2^2. \tag{62}$$

Положим

$$x_1^{(0)} = t,\quad x_2^{(0)} = -t,\quad z^{(0)} = \frac{1}{2} t^2.$$

Полный интеграл уравнения (61):

$$z = x_1 a_1 + x_2 a_2 - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2). \tag{57}$$

Ищем интеграл $M^{(1)}$ по основанию (62). Условие

$$dz^{(0)} = p_1^{(0)} dx_1^{(0)} + p_2^{(0)} dx_2^{(0)}$$

обращается в

$$t = p_1^{(0)} - p_2^{(0)}.$$

Уравнение (61) дает

$$\frac{1}{2}t^2 = tp_1^{(0)} - tp_2^{(0)} - \frac{1}{2}(p_1^{(0)2} + p_2^{(0)2}) = t^2 - \frac{1}{2}(p_1^{(0)2} + p_2^{(0)2}),$$

откуда

$$p_1^{(0)2} + p_2^{(0)2} = t^2.$$

Отыскивая $p_1^{(0)}$ и $p_2^{(0)}$ из последних уравнений, находим или

$$p_1^{(0)} = 0, \quad p_2^{(0)} = -t \quad \text{или} \quad p_1^{(0)} = t, \quad p_2^{(0)} = 0.$$

Рассмотрим сначала первое предположение. Отыскивая характеристические линии по интегралу $M^{(1)}$:

$$x_1^{(0)} = t, \quad x_2^{(0)} = -t, \quad z^{(0)} = \frac{1}{2}t^3, \quad p_1^{(0)} = 0, \quad p_2^{(0)} = -t$$

из уравнений

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 = p_1^{(0)}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 = p_2^{(0)}$$

находим

$$a_1^{(0)} = 0, \quad a_2^{(0)} = -t;$$

после этого уравнение

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 + c^{(0)}\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0 = 0$$

дает

$$x_1^{(0)} - a_1^{(0)} + c^{(0)}(x_2^{(0)} - a_2^{(0)}) = 0$$

или

$$t + c^{(0)}(-t + t) = 0, c^{(0)} = \infty.$$

Уравнение искомого семейства характеристических линий:

$$z = x_1 0 + x_2(-t) - \frac{1}{2}(0^2 + t^2) = -x_2 t - \frac{1}{2}t^2$$

$$\frac{1}{c_0}(x_1 - 0) + (x_2 + t) = 0 \quad \text{или} \quad x_2 + t = 0.$$

Исключая t, получаем искомое решение

$$z = \frac{1}{2}x_2^2.$$

Исходя от решения

$$p_1^{(0)} = t, \quad p_2^{(0)} = 0,$$

мы получили бы поверхность

$$z = \frac{1}{2}x_1^2.$$

2) Найти то решение уравнения (61), в котором при $x_1=0$:

$$z=x_2-\frac{1}{2}. \tag{63}$$

Положим

$$x_1^{(0)}=0, \quad x_2^{(0)}=t, \quad z^{(0)}=t-\frac{1}{2}.$$

Для нахождения $M^{(1)}$ по основанию (63) надо решить уравнения:

$$1=p_2^{(0)}, \quad t-\frac{1}{2}=tp_2^{(0)}-\frac{1}{2}\left(p_1^{(0)^2}+p_2^{(0)^2}\right),$$

откуда получаем

$$p_1^{(0)}=0, \quad p_2^{(0)}=1.$$

Отыскивая a_1 и a_2 при помощи уравнений

$$a_1=p_1, \quad a_2=p_2,$$

находим

$$a_1^{(0)}=p_1^{(0)}=0, \quad a_2^{(0)}=p_2^{(0)}=1.$$

Отыскивая c при помощи уравнения

$$x_1-a_1+c\,(x_2-a_2)=0,$$

находим

$$0+c^{(0)}\,(t-1)=0, \quad c^{(0)}=0.$$

Искомые характеристические линии даны уравнениями:

$$z=x_2-\frac{1}{2}, \quad x_1=0.$$

Уравнения не зависят от параметра t и определяют одну линию, а не семейство их, причем как раз линию (63). В этом случае данная линия одна из характеристических. Ее уравнение получается из уравнений характеристических линий

$$z=x_1a_1+x_2a_2-\frac{1}{2}\left(a_1{}^2+a_2{}^2\right)$$

$$x_1-a_1+c\,(x_2-a_2)=0,$$

если положить в них $a_1=0$, $a_2=1$, $c=0$.

Уравнение имеет однако интегральную поверхность, заключающую линию (63). Мы именно знаем, что оно имеет решение

$$z=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2}-\frac{1}{2}.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае якобиан (54) обращается в нуль на найденном интеграле. Действительно, он равен

$$\begin{vmatrix} x_1-p_1, & x_2-p_2 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & t-1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Найти то решение уравнения (61), в котором

$$\text{при} \quad x_1 = 0, \quad z = \frac{x_2^2}{2}. \tag{64}$$

Положим

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = t, \quad z = \frac{t^2}{2}.$$

Для нахождения $M^{(1)}$ по основанию (64) надо решить уравнения

$$t = p_2^{(0)}, \quad \frac{t^2}{2} = tp_2^{(0)} - \frac{1}{2}(p_1^{(0)^2} + p_2^{(0)^2}),$$

из которых получаем

$$p_1^{(0)} = 0, \quad p_2^{(0)} = t.$$

Отыскивая $a_1^{(0)}$ и $a_2^{(0)}$, решаем уравнения

$$a_1^{(0)} = p_1^{(0)}, \quad a_2^{(0)} = p_2^{(0)}$$

и находим

$$a_1^{(0)} = 0, \quad a_2^{(0)} = t.$$

Отыскивая $c^{(0)}$, надо решить уравнение

$$x_1^{(0)} - a_1^{(0)} + c^{(0)}(x_2^{(0)} - a_2^{(0)}) = 0,$$

которое имеет вид

$$0 + c^{(0)} \cdot 0 = 0$$

и оставляет $c^{(0)}$ неопределенным.

Для характеристических линий имеем уравнения

$$z = x_2 t - \frac{1}{2} t^2, \quad x_1 + c^{(0)}(x_2 - t) = 0, \tag{65}$$

в которых $c^{(0)}$ осталось неопределенным. Мы имеем дело с особенным случаем.

Нетрудно непосредственно проверить, что задача Коши (64) поставлена быть не может.

Отыскивая p_1 из уравнения (61), получаем

$$p_1 = x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 2z + 2x_2 p_2 - p_2^2}.$$

Так как на кривой (64) имеем $p_2 = x_2$, ясно, что во всех точках кривой (64) подкоренное количество в выражении p_1 равно нулю, значит, p_1 не голоморфна вблизи всех точек кривой (64). Связав в (65) $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $c^{(0)}$ зависимостью

$$da_2^{(0)} = c^{(0)} da_1^{(0)},$$

получим из (65) решение уравнения (61). Так как теперь $a_1^{(0)} = 0$, $a_2^{(0)} = t$, имеем

$$0 \cdot c^{(0)} = 1, \quad c^{(0)} = \infty.$$

Подставляя в (65), находим последовательно

$$z = x_2 t - \frac{1}{2} t^2, \quad x_2 - t = 0$$

$$z = \frac{x_2^2}{2}.$$

Определитель (54) равен нулю и в рассматриваемом случае.

4) Так как самое общее решение уравнения

$$x_1 p_1 - x_2 p_2 = 0$$

есть

$$z = \varphi(x_1 \ x_2),$$

то его полный интеграл

$$z = a_1 x_1 x_2 - a_2,$$

а уравнения характеристических линий

$$z = a_1 x_1 x_2 - a_2, \quad b = x_1 x_2 \quad \text{или} \quad z = a, \quad x_1 x_2 = b.$$

Ищем решение, в котором

$$\text{при } x_2 = \frac{h}{x_1} : z = 0.$$

Положив

$$x_1^{(0)} = t, \quad x_2^{(0)} = \frac{h}{t}, \quad z_0 = 0,$$

ищем интеграл $M^{(1)}$. Для его нахождения имеем тожественные уравнения

$$0 = p_1^{(0)} - \frac{h}{t^2} p_2^{(0)}, \quad t p_1^{(0)} - \frac{h}{t} p_2^{(0)} = 0,$$

которым можно удовлетворить, положив

$$p_2^{(0)} = u, \quad p_1^{(0)} = \frac{h}{t^2} u.$$

Мы имеем дело с характеристическим случаем и нашли интеграл $M^{(2)}$, который при $h = 0$ обращается в интеграл примера § 65. Определитель (54) равен нулю. Продолжая выкладки, легко найдем

$$a^{(0)} = 0, \quad b^{(0)} = h$$

и восстановим исходное основание:

$$z = 0, \quad x_1 x_2 = h.$$

5) В качестве последнего примера рассмотрим случай, в котором основание интегрального элемента вырождается в точку. Положим, что основание дано равенствами

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \quad z = z^{(0)}$$

где $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $z^{(0)}$ постоянные.

Искомое решение в этом случае есть геометрическое место характеристических линий, проходящих через точку $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)})$, т. е. конус характеристических линий с вершиной в этой точке.

Это решение можно найти, подставляя в уравнения (47) характеристических линий $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z^{(0)}$ на место x_1, x_2, z, присоединяя составленные уравнения к (47) и исключая из четырех полученных уравнений три параметра a_1, a_2, c.

69. Характеристические линии в общем случае. Положим, дано уравнение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \tag{3}$$

и известен его полный интеграл

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Задание уравнения (3) равносильно заданию $n+1$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} & z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ & p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \quad p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Положим далее, что дано не особенное решение уравнения (3):

$$z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{67}$$

Равенство (67) определяет поверхность в пространстве, число измерений которого $n+1$, понимая под поверхностью в таком пространстве многообразие n измерений.

Решение (67) может быть получено из полного интеграла, если мы свяжем параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n$ несколькими зависимостями, число которых колеблется от 1 до п. Положим, что для получения (67) надо связать эти параметры k зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} & a_1 = \vartheta_1(a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & a_k = \vartheta_k(a_{k+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

На основании сказанного в § 51 задание решения (67) равносильно заданию уравнений

$$\left.\begin{aligned} & z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ & a_1 = \vartheta_1(a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & a_k = \vartheta_k(a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ & \frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_{k+1}} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_k}\frac{\partial \vartheta_k}{\partial a_{k+1}} + \frac{\partial V}{\partial a_{k+1}} = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial a_n} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_k}\frac{\partial \vartheta_k}{\partial a_n} + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{67$_1$}$$

Решение (67) получается из (67_1) исключением n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Заменим систему (67_1) другою, вводя в рассмотрение новые $n-1$ параметров и связывая их тут же $n-1$ уравнениями. Ясно, что система (67_1) равносильна системе:

$$\left.\begin{array}{c} z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ b_2 \dfrac{\partial V}{\partial a_1} + \dfrac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \quad b_3 \dfrac{\partial V}{\partial a_1} + \dfrac{\partial V}{\partial a_3} = 0, \ldots, \quad b_n \dfrac{\partial V}{\partial a_1} + \dfrac{\partial V}{\partial a_n} = 0 \\ a_1 = \vartheta_1(a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_k = \vartheta_k(a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ \dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial a_{k+1}} - b_2 \dfrac{\partial \vartheta_2}{\partial a_{k+1}} - \ldots - b_k \dfrac{\partial \vartheta_k}{\partial a_{k+1}} - b_{k+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial a_n} - b_2 \dfrac{\partial \vartheta_2}{\partial a_n} - \ldots - b_k \dfrac{\partial \vartheta_k}{\partial a_n} - b_n = 0 \end{array}\right\} (67_2)$$

Последние $n-k$ уравнений системы (67_2) получаются из последних $n-k$ уравнений системы (67_1) исключением производных

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n}$$

при помощи первых n уравнений системы (67_2) и сокращением на $\dfrac{\partial V}{\partial a_1}$. Так как по предположению решение (67) не особенное, одна из этих производных не нуль, и мы можем, составляя первые n уравнений системы (67_2), считать, что не нуль именно $\dfrac{\partial V}{\partial a_1}$. Система ($67_2$) равносильна системе ($67_1$) и, значит, ее задание заменяет задание поверхности (67).

Исключая из уравнений (67_2) параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_n$, мы получаем поверхность (67). Приступая к исключению, исключим сначала из n первых уравнений (67_2) при помощи п последних параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Мы получим n уравнений, связывающие $n+1$ аргументов

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z,$$

и зависящих от $n-1$ параметров $b_2, \ldots, b_n$; но n уравнений с $n+1$ неизвестными определяют в пространстве, число измерений которого $n+1$, кривую, т. е. многообразие одного измерения.

Значит мы определили семейство кривых, зависящих от $n-1$ параметров. Так как исключение этих параметров приводит к поверхности (67), каждая из этих кривых лежит на поверхности (67), и поверхность (67) есть геометрическое место кривых.

Полученные кривые мы будем называть характеристическими линиями поверхности (67). Семейство этих характеристических линий определяется $n-1$ параметрами.

Введем теперь в рассмотрение семейство линий, зависящих от $2n-1$ параметров, приняв во внимание только n первые уравнения системы (67_2):

$$\left.\begin{aligned} z &= V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) \\ b_2 \frac{\partial V}{\partial a_1} + \frac{\partial V}{\partial a_2} &= 0, \ldots, b_n \frac{\partial V}{\partial a_1} + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Линии (69) мы назовем характеристическими линиями уравнения (3). Их семейство зависит от $2n-1$ параметров.

Примечание. Из уравнений второй строки (69) нельзя исключить переменных $x_1, \ldots, x_n$, установив зависимость вида

$$\omega(b_2, \ldots, b_n, a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

В случае, когда уравнение (3) зависит от z, предположение противного говорило бы, что из $\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n}$ возможно исключение $x_1, \ldots, x_n$, т. е. что якобиан

$$\frac{D\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{D(a_1, \ldots, a_n)}$$

равен нулю, чего нет во взятом случае; в случае, когда уравнение (3) не зависит от z, взяв за a_1 аддитивную постоянную, мы заключили бы, что постоянные $a_2, \ldots, a_n$ не могут быть найдены из уравнений (2), что опять-таки невозможно. Следовательно, из уравнений (69) второй строки можно найти $n-1$ из аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а так как первое уравнение (69) дает z, уравнения (69) определяют действительно линию.

Итак, семейство (69) зависит от $2n-1$ параметров. Чтобы получить из него семейство характеристических линий некоторого решения, надо n параметров выразить некоторым образом через остальные или связать все $2n-1$ параметров некоторыми n зависимостями.

Эти зависимости, однако, нельзя выбирать совершенно произвольно. Присоединив их к уравнениям (69), мы получим возможность найти $2n-1$ параметров $a_1, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_n$ в функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и, значит, чтобы z стало решением уравнения (3), должно оказаться соблюденным условие

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0. \tag{NB}$$

Примечание. Если мы заменим первое уравнение (69) уравнением (69′)

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_n) = 0, \tag{69′}$$

не решенным относительно z, то последние $n-1$ уравнений (69) можно при наличии этого уравнения заменить уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} b_2 + \frac{\partial W}{\partial a_2} = 0, \ldots, b_n \frac{\partial W}{\partial a_1} + \frac{\partial W}{\partial a_n} = 0. \qquad (69'')$$

Пример. Мы видели в § 58, что полные интегралы уравнений

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = 0 \qquad (17)$$

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = X \qquad (17')$$

даны соответственно уравнениями

$$z = a + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 + \ldots + a_n \varphi_n$$

$$V_0 = a + a_2 V_2 + a_3 V_3 + \ldots + a_n V_n,$$

в которых $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ и $V_0, V_2, \ldots, V_n$ главные решения уравнения (17) и уравнения

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + X \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

т. е. решения, обращающиеся при $x_1 = x_1^{(0)}$ в $x_2, x_3, \ldots, x_n$ и z.

Следовательно, за уравнения характеристических линий уравнений (17) и (17′) надо брать соответственно уравнения

$$\left.\begin{array}{l} z = a + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 + \ldots + a_n \varphi_n \\ b_2 + \varphi_2 = 0,\ b_3 + \varphi_3 = 0,\ \ldots, b_n + \varphi_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (70)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} V_0 = a + a_2 V_2 + a_3 V_3 + \ldots + a_n V_n \\ b_2 + V_2 = 0,\ b_3 + V_3 = 0, \ldots, b_n + V_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (70')$$

или

$$z = c,\ \varphi_2 + b_2 = 0,\ \varphi_3 + b_3 = 0, \ldots, \varphi_n + b_n = 0 \qquad (70)$$

и

$$V_0 = c,\ b_2 + V_2 = 0,\ b_3 + V_3 = 0, \ldots,\ b_n + V_n = 0, \qquad (70')$$

что вполне согласно с определениями, данными в § 15.

70. Уравнения характеристических линий. Повторяя почти дословно рассуждения § 62, мы можем убедиться, что состав семейства характеристических линий уравнения не зависит от выбора его полного интеграла.

Отыскивая направляющие коэффициенты касательной к выбранной характеристической линии, находим, дифференцируя уравнения (69):

$$\left.\begin{array}{c} dz = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_i \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{s=n} \left(b_i \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_s} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_s} \right) dx_s = 0. \ (i = 2, 3, \ldots, n) \end{array}\right\} \qquad (71)$$

Так как z, данное первым уравнением (69), решение уравнения (3), то имеем тожество

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) \equiv 0. \tag{72}$$

Обозначая, как в § 62, скобкой результат замены $z, p_1, \ldots, p_n$ через $V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$ и подразумевая под $z, p_1, \ldots, p_n$ эти функции, из тожества (72) заключаем, дифференцируя по $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial a_1} + \sum_{s=1}^{s=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, \partial x_s} \equiv 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial a_i} + \sum_{s=1}^{s=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial x_s} \equiv 0.$$

Считая, что точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ на характеристике (69), из последних тожеств, пользуясь уравнениями (69) второй строки, находим

$$\sum_{s=1}^{s=n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\, \partial x_s} b_i + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i\, \partial x_s}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_s}\right) = 0. \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{73}$$

Сравнение уравнений (73) с уравнениями (71) указывает, что во всех точках линии (69) с определенной касательной имеют место равенства:

$$\frac{dx_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = \frac{dx_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)} = \ldots = \frac{dx_n}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)}. \tag{74}$$

Дифференцируя далее тожество (72) по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)p_k + \sum_{s=1}^{s=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_s\, \partial x_k} \equiv 0$$

и, на основании (74):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)p_k + \lambda \sum_{s=1}^{s=n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_s\, \partial x_k}dx_s = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)p_k + \lambda\, dp_k = 0,$$

где $\frac{1}{\lambda}$ знаменатель пропорции (74).

Отсюда заключаем, что

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{dp_k}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)p_k}$$

и, значит, использовав первое уравнение (71), что

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial f}{\partial p_i}} = -\frac{dp_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dz}{\sum\limits_{s=1}^{s=n} \frac{\partial f}{\partial p_i} p_i}, \tag{75}$$

причем к системе (75) надо присоединить уравнение

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, \; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{3}$$

Мы имеем все необходимое для составления системы характеристических линий независимо от полного интеграла.

Уравнение

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = h$$

один из интегралов системы (75). Действительно,

$$df = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i$$

обращается тожественно в нуль по замене $dx_1, \ldots, dx_n, dz, dp_1, \ldots, dp_n$ величинами им пропорциональными, взятыми из системы (75). Вследствие этого, присоединение к системе (75) уравнения (3) имеет единственным следствием уменьшение на единицу числа произвольных постоянных, от которых зависит собрание общих решений системы (75). Число оставшихся произвольных постоянных в этом собрании равно, значит,

$$2n - 1,$$

т. е. как раз числу параметров в семействе (69); мы вернемся впоследствии к выяснению этого обстоятельства.

Когда дано решение уравнения (3), значения $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$, могут быть найдены непосредственно без помощи полного интеграла. Следовательно, коэффициенты системы (74) вполне определены, когда задано решение уравнения (3); между тем характеристические линии решения связаны этими уравнениями. Следовательно, характеристические линии решения можно найти, присоединяя к решению интегралы системы (74), составленной по решению; мы получаем семейство линий, зависящее как раз от $n-1$ параметров, геометрическое место которых есть взятое решение.

71. Интегральный элемент. Когда дана интегральная поверхность — решение уравнения (3) — то всякая точка ее определяет не только ее координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, но также и коэффициенты касательной плоскости к поверхности в этой точке, т. е. производные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ от z по $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Совокупность чисел

$$M^{(0)}\,(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \tag{76}$$

называется интегральным элементом уравнения (3), если эти числа связаны соотношением

$$f\,(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) = 0. \tag{3$_1$}$$

Теорема 1. *По интегральному элементу $M^{(0)}$ можно, вообще говоря, найти проходящую через точку $m\,(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)})$ характеристическую линию некоторого решения, содержащего элемент $M^{(0)}$.*

Положим, что

$$\left.\begin{aligned} z = V\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) \\ b_2^{(0)} \frac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}} + \frac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}} = 0, \ldots, b_n^{(0)} \frac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}} + \frac{\partial V}{\partial a_n^{(0)}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

уравнения искомой характеристической линии. Знаками

$$\frac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}}, \frac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n^{(0)}}$$

нами обозначены результаты замены в соответствующих производных от V аргументов $a_1, \ldots, a_n$ их значениями $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$.

Линия (77) должна проходить через точку m, т. е. должны быть справедливы равенства:

$$\left.\begin{aligned} z^{(0)} = V(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) \\ b_2^{(0)} \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0 = 0, \ldots, b_n^{(0)} \left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial a_n}\right)_0 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (77_1)$$

в которых знаками

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial V}{\partial a_n}\right)_0$$

обозначены результаты замены в соответствующих производных от V всех аргументов x_i, a_i числами $x_i^{(0)}$, $a_i^{(0)}$.

Когда известны числа $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}, b_2^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$ можно на бесчисленное множество способов подобрать функции $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ в уравнениях (67_2) так, чтобы эти числа им удовлетворяли. Выбор функций $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ приведет к нахождению функций $a_1, a_2, \ldots, a_n$, значения которых в точке m равны $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ и которые удовлетворяют условию

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0; \qquad (\text{№})$$

вследствие этого

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (78)$$

решение уравнения (3). Такое решение можно найти, между прочим, положив

$$a_1 = a_1^{(0)}, \ldots, a_n = a_n^{(0)}$$

и отыскивая $b_2^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$ из уравнений второй строки (77_1).

На решении (78) вследствие условия (№) имеем:

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

и, значит, должно быть:

$$\left.\begin{aligned} p_1^{(0)} &= \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, p_n^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)_0 \\ z^{(0)} &= V\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Уравнения (79) не зависят от того, как выбраны функции $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k$ и составленное решение, но вполне определены заданием интегрального элемента $M^{(0)}$. Пользуясь уравнениями (79) можно, вообще говоря, найти $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$. Мы говорим „вообще говоря“ потому, что в этих уравнениях $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z$ имеют частные значения; если бы они оставались произвольными, то найти $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ можно было бы наверное. Найдя $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$, можно найти $b_1^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$ из уравнений (77_1) второй строки. Составив после этого систему (77), находим искомую характеристическую линию.

Про найденную характеристическую линию условимся говорить, что она проходит через элемент $M^{(0)}$.

Если характеристической линии по элементу $M^{(0)}$ нельзя найти, то элемент $M^{(0)}$ мы назовем особенным.

Как следствие теоремы 1 опять получаем: если два решения имеют общий, не особенный интегральный элемент, то они имеют общую характеристическую линию, проходящую через этот элемент, и определяют интегральные поверхности, касающиеся вдоль указанной характеристической линии.

Характеристическая линия, лежащая на решении, именно, вполне определена интегральным элементом; вдоль этой линии $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сохраняют постоянные значения и, значит, производные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ во всех точках этой линии вполне определены.

72. Интеграл $M^{(n-1)}$. *Мы назовем многообразие измерения $n-1$*

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(0)} &= \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(0)} &= \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \\ z^{(0)} &= \varphi\ (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \\ p_1^{(0)} &= p_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n^{(0)} &= p_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

т. е. собрание значений $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ в функции от $n-1$ независимых переменных

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1},$$

интегралом $M^{(n-1)}$, если соблюдены два условия: условие

$$f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) = 0 \tag{3$_1$}$$

и условие

$$dz^{(0)} = p_1^{(0)} dx_1^{(0)} + p_2^{(0)} dx_2^{(0)} + \ldots + p_n^{(0)} dx_n^{(0)}. \tag{81}$$

Про первые $n+1$ равенств (80) мы будем говорить, что они образуют основание интеграла $M^{(n-1)}$.

При решении задачи Коши, как мы увидим, имеют значение только те интегралы $M^{(n-1)}$, в которых основание есть многообразие $n-1$ измерений; но в этом параграфе мы не имеем причины ограничивать себя этим случаем, и мы можем считать, что аргументы $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ зависят от k параметров, где $k \leqq n-1$.

Заметим, однако, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зависят от k параметров, то число параметров, от которых зависит z, не более k; иначе левая часть равенства (81) зависела бы от большего числа дифференциалов, чем правая. Следовательно, если $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ зависят от k параметров, основание $M^{(n-1)}$ зависит также от k параметров. Из сказанного, между прочим, вытекает, что если основание измерения $n-1$, то $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ связаны одною и только одною зависимостью. Действительно, если бы число зависимостей, связывающих $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ было бы более единицы, то $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ были бы функциями параметров, число k которых меньше $n-1$.

Теорема 2. *По основанию, вообще говоря, можно найти интеграл $M^{(n-1)}$.*

Рассмотрим сначала, как более важный для нас, случай, когда основание измерения $n-1$; в этом случае, исключая $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ из первых n уравнений (80), можно получить только одну зависимость, связывающую $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$; в этом случае, значит, не все определители таблицы

$$\left\| \begin{array}{c} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}, \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_{n-1}}, \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_{n-1}}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}} \end{array} \right\|$$

равны нулю, (т. е. ранг таблицы равен $n-1$).

Для нахождения интеграла $M^{(n-1)}$, когда дано основание, надо найти только значения $p_1, p_2, \ldots, p_n$. В уравнении (3_1) мы имеем одно уравнение для их нахождения. Условие (81) дает еще $n-1$ уравнений. Подставляя в него, именно, вместо $z^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ их значения и приравнивая нулю коэффициенты при

$$du_1, du_2, \ldots, du_{n-1},$$

мы получаем уравнения

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} = p_1^{(0)} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} + p_2^{(0)} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} + \ldots + p_n^{(0)} \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}} = p_1^{(0)} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_{n-1}} + p_2^{(0)} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_{n-1}} + \ldots + p_n^{(0)} \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_{n-1}} \end{array}\right\} \tag{82}$$

Из уравнений (3_1) и (82) могут быть, вообще говоря, найдены все аргументы $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$.

Чтобы пояснить слова, вообще говоря, заметим, что при решении уравнений (3_1) и (82) имеет значение изучение якобиана

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\right), \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_2}\right), \ldots, \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_n}\right) \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}, \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_{n-1}}, \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_{n-1}}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{82_1}$$

где знак $\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_k}\right)$ обозначает результат замены аргументов $x_1, \ldots, x_n, z$ через $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}$ по первым $n+1$ уравнениям (80). Если этот якобиан не равен нулю на основании решаемых уравнений, то можно подобрать такие числа $p_1^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)}, u_1^{(0)}, \ldots, u_{n-1}^{(0)}$, при которых уравнения (3_1) и (82) соблюдены, но якобиан не нуль; значит, система из уравнений (3_1) и (82) имеет решение, в котором значения $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ при $u_1 = u_1^{(0)}, \ldots, u_{n-1} = u_{n-1}^{(0)}$ равны $p_1^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)}$.

Оставляя в стороне случай, когда из уравнений (3_1) и (82) нельзя найти конечных или голоморфных на данном основании значений для $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$, который мы назовем исключительным, отметим случай, когда при решении этих уравнений одно из $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ остается произвольным, а также случай, когда голоморфные значения $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$, удовлетворяющие уравнениям (3_1) и

(82), оказываются обращающими в нуль якобиан (82_1). Каждый из этих случаев мы назовем характеристическим.

Заметим, что когда параметрами служат $x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$ и мы имеем для основания уравнения

$$x_n^{(0)} = \vartheta\,(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}), \quad z^{(0)} = \theta\,(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}),$$

определитель (82_1) равен

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right), & \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right), \ldots, & \left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-1}}\right), & \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) \\ 1, & 0, \ldots, & 0, & \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1^{(0)}} \\ 0, & 1, \ldots, & 0, & \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2^{(0)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, \ldots, & 1, & \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}^{(0)}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1^{(0)}} - \ldots - \left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-1}}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}^{(0)}}. \qquad (82_2)$$

Переходим теперь к случаю, когда основание множество k изменений, где $k < n-1$. В этом случае система (82) будет содержать k уравнений, из которых совместно с уравнением (3_1) могут быть найдены, вообще говоря, $k+1$ из аргументов $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$; значит $n-k-1$ из них останутся, вообще говоря, произвольными, вследствие чего совокупность значений $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ будет снова интегралом $M^{(n-1)}$.

Последнее обстоятельство наверное будет иметь место, если не все определители таблицы из n столбцов и $k+1$ строк, в которую теперь обращается определитель (82_1), нули вследствие уравнений основания.

В противном же случае могут обнаружиться все те обстоятельства, о которых мы упоминали, говоря о случае $k = n-1$.

Замечание. Сказанное в замечании к § 64 применимо и к рассуждениям этого параграфа.

73. Интеграл $M^{(n)}$. Обобщая данное определение интеграла $M^{(n-1)}$, мы можем назвать интегралом $M^{(n)}$ совокупность значений $x_1, \ldots, x_n$, z, $p_1, \ldots, p_n$, зависящих от n параметров, удовлетворяющую уравнениям (3_1) и (81). Если известно решение уравнения (3), то известен интеграл $M^{(n)}$. Действительно, если $z = \Phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ решение уравнения (3), то, положив

$$x_1 = u_1, \ \ldots, \ x_n = u_n, \quad z = \Phi\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$p_1 = \Phi'_{x_1}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ \ldots, p_n = \Phi'_{x_n}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

мы, очевидно, удовлетворим условиям (3_1) и (81).

Но задача нахождения интеграла $M^{(n)}$ и решения уравнения (3) не равносильны: не по всякому интегралу $M^{(n)}$ мы можем непосредственно составить решение уравнения (3), как видно, например, из примера в § 65.

74. Задача Коши. Занимаясь одним линейным уравнением, мы ставили в § 8 и 16 задачу Коши следующим образом: дано число $x_n^{(0)}$ и функция $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; найти то решение уравнения, в котором при

$$x_n = x_n^{(0)} : z = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Далее мы обобщили задачу следующим образом: найти решение уравнения, в котором при

$$x_n = \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) : z = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

При каждой из этих постановок задачи, в пространстве, число измерений которого $n+1$, задавалось многообразие измерения $n-1$ и искалось решение, его заключающее.

Ставя теперь задачу Коши, мы можем поставить ее следующим образом: дано многообразие $n-1$ измерений в пространстве, число измерений которого $n+1$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(0)} = \varphi_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(0)} = \varphi_n(u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ z^{(0)} = \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{array}\right\} \qquad (83)$$

Найти решение уравнения

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \qquad (3)$$

заключающее это многообразие.

Отметим, что из задания, по которому измерение многообразия (83) равно $n-1$, уже вытекает, что исключение $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ из первых n уравнений (83) дает только одну зависимость между $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$.

Если существует решение задачи, то искомая интегральная поверхность содержит многообразие (83) и можно для каждой точки на нем найти ее интегральный элемент, отыскивая по основанию (83) интеграл $M^{(n-1)}$. Через каждый такой элемент проходит характеристическая линия, принадлежащая искомому решению, которая, если (83) не есть геометрическое место некоторого семейства этих линий (такое семейство можно получить, связав n параметров характеристических линий решения одною зависимостью), отлична от линий, принадлежащих многообразию (83). Характеристические линии, проходящие через указанные интегральные элементы, образуют семейство характеристических линий решения и само решение — их геометрическое место.

Из этого вытекает, что для решения задачи можно поступать так: ищем по основанию (83) интеграл $M^{(n-1)}$, отыскивая $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ из уравнений

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) = 0 \\ dz^{(0)} = p_1^{(0)} dx_1^{(0)} + \ldots + p_n^{(0)} dx_n^{(0)}, \end{array}\right\} \qquad (84)$$

из которых второе равносильно уравнениям:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1} = p_1^{(0)} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} + \ldots + p_n^{(0)} \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} = p_1^{(0)} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_{n-1}} + \ldots + p_n^{(0)} \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}} \end{array}\right\} \qquad (84')$$

Найдя интеграл $M^{(n-1)}$, ищем характеристические линии, определенные его элементами, определяя параметры a и b по формулам:

$$\left.\begin{array}{l} z^{(0)} = V\,(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 = p_1^{(0)}, \ \ldots, \ \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)_0 = p_n^{(0)} \\ b_2^{(0)}\left(\dfrac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0 = 0, \ \ldots, \ b_n^{(0)}\left(\dfrac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial a_n}\right)_0 = 0 \end{array}\right\} \qquad (85)$$

Полученные $a^{(0)}$ и $b^{(0)}$ будут функциями от аргументов u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$. Искомое решение должно быть результатом исключения этих аргументов из уравнений

$$\left.\begin{array}{l} z = V\,(x_1, \ldots, x_n, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}), \\ b_2^{(0)} \dfrac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}} + \dfrac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}} = 0, \ \ldots, \ b_n^{(0)} \dfrac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}} + \dfrac{\partial V}{\partial a_n^{(0)}} = 0. \end{array}\right\} \qquad (86)$$

Примечание. Уравнения (85) и (86) могут быть заменены уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} W\,(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial W}{\partial z}\right)_0 p_1^{(0)} + \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_1}\right)_0 = 0, \ \ldots, \ \left(\dfrac{\partial W}{\partial z}\right)_0 p_n^{(0)} + \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_n}\right)_0 = 0 \\ b_2^{(0)}\left(\dfrac{\partial W}{\partial a_1}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial W}{\partial a_2}\right)_0 = 0, \ \ldots, \ b_n^{(0)}\left(\dfrac{\partial W}{\partial a_1}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial W}{\partial a_n}\right)_0 = 0 \end{array}\right\} \qquad (85')$$

и

$$\left.\begin{array}{l} W\,(x_1, \ldots, x_n, z, a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) = 0 \\ b_2^{(0)} \dfrac{\partial W}{\partial a_1^{(0)}} + \dfrac{\partial W}{\partial a_2^{(0)}} = 0, \ \ldots, \ b_n^{(0)} \dfrac{\partial W}{\partial a_1^{(0)}} + \dfrac{\partial W}{\partial a_n^{(0)}} = 0. \end{array}\right\} \qquad (86')$$

Остается установить, что нами действительно найдено решение. Для того чтобы в результате исключения мы получили z как функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, уравнения второй строки в (86) должны быть разрешимы относительно $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Такое ешение даст параметры $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ в виде функций от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, вследствие чего $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ будут функциями этих аргументов. Но тогда, чтобы z было решением уравнения (3) достаточно, чтобы было соблюдено условие

$$\frac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}} da_1^{(0)} + \frac{\partial V}{\partial a_2^{(0)}} da_2^{(0)} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n^{(0)}} da_n^{(0)}, \qquad (\text{№})$$

которому вследствие последних равенств (86), можно дать вид

$$da_1^{(0)} = b_2^{(0)} da_2^{(0)} + \ldots + b_n^{(0)} da_n^{(0)}, \qquad (87)$$

считая, что $\dfrac{\partial V}{\partial a_1^{(0)}} \neq 0$; последнее предположение законно, так как если все производные $\dfrac{\partial V}{\partial a_i^{(0)}}$ нули, нули также и все $\left(\dfrac{\partial V}{\partial a_i}\right)_0$ и мы при решении задачи имеем дело с особенным случаем.

Параметры $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ находятся нами из первых $n+1$ уравнений (85).

Дифференцируя первое из уравнений (85) и пользуясь зависимостью (84), получаем вследствие остальных уравнений (85) сначала

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0 da_1^{(0)} + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial a_n}\right)_0 da_n^{(0)} = 0,$$

а затем

$$da_1^{(0)} = b_2^{(0)}\, da_2^{(0)} + \ldots + b_n^{(0)} da_n^{(0)}; \qquad (88)$$

отсюда ясно, что найденная нами при помощи описанного процесса поверхность есть всегда интегральная.

75. Исключительные случаи задачи Коши. Переходя к обзору случаев, в которых описанный в прошлом параграфе процесс не приводит к решению, начнем, как в § 67, с разбора предположения, что из уравнений второй строки (86) не могут быть найдены параметры $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Обозначим, для удобства, знаками δ дифференциалы, взятые в предположении, что меняются только $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Если из уравнений второй строки (86) нельзя найти $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, то якобиан этих уравнений по $u_1, \ldots, u_{n-1}$ равняется тожественно нулю; если он не равен нулю при некотором выборе чисел $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_{n-1}^{(1)}$, то $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ могут быть найдены.

Значит, если $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ левые части этих уравнений, из уравнений

$$\delta\omega_2 = 0,\ \delta\omega_3 = 0,\ \ldots,\ \delta\omega_n = 0,$$

в которых знак δ обозначает результат дифференцирования по $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, можно исключить дифференциалы $du_1, du_2, \ldots, du_{n-1}$ и составить некоторую зависимость:

$$A_2\,\delta\omega_2 + \ldots + A_n\,\delta\omega_n \equiv 0. \qquad (87)$$

Заменяя в (87) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, мы получим

$$(A_2)(\delta\omega_2) + \ldots + (A_n)(\delta\omega_n) = 0. \qquad (87_1)$$

Дифференцируем теперь уравнения третьей строки в (85). Обозначаем через d часть дифференциала, зависящую от $dx_1^{(0)}, \ldots, dx_n^{(0)}$.

Имеем

$$(d\omega_2) + (\delta\omega_2) = 0,\ \ldots,\ (d\omega_n) + (\delta\omega_n) = 0,$$

откуда вследствие (87_1):

$$(A_2)(d\omega_2) + (A_3)(d\omega_3) + \ldots + (A_n)(d\omega_n) = 0. \qquad (88)$$

Положим

$$(d\omega_s) = \alpha_1^{(s)}\,dx_1^{(0)} + \alpha_2^{(s)}\,dx_2^{(0)} + \ldots + \alpha_n^{(s)}\,dx_n^{(0)},$$

где

$$\alpha_i^{(s)} = b_s^{(0)}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_i}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_s \partial x_i}\right)_0.$$

Положим теперь, для удобства, что за параметры $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ выбраны $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$, т. е. что уравнения основания имеют вид, указанный в § 72:

$$x_n^{(0)} = \vartheta(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}),\ z^{(0)} = \varphi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}).$$

Тогда

$$(d\omega_s) = \left(\alpha_1^{(s)} + \alpha_n^{(s)}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1^{(0)}}\right)dx_1^{(0)} + \ldots + \left(\alpha_{n-1}^{(s)} + \alpha_n^{(s)}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{n-1}^{(0)}}\right)dx_{n-1}^{(0)}$$

и уравнение (88) распадается на $n-1$ уравнений:

$$\sum_{s=2}^{s=n}(A_s)\left(\alpha_i^{(s)} + \alpha_n^{(s)}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i^{(0)}}\right) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (89)$$

Благодаря первому уравнению (84) и уравнениям первых двух строк в (85), справедливо тожество

$$f\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, (V)_0, \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)_0\right) \equiv 0.$$

Рассуждая как в § 70 и пользуясь уравнениями третьей строки в (85), из последнего тожества заключаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_i}\right)_0 b_s^{(0)}+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_s \partial x_i}\right)_0\right\}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)=0,\ s=2,\ \ldots,\ n,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i^{(s)}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)=0,\ s=2,\ldots,n.$$

Умножая последние уравнения на (A_2), (A_3), $\ldots$, (A_n) и складывая их, находим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\sum_{s=2}^{s=n}(A_s)\,a_1^{(s)}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\sum_{s=2}^{s=n}(A_s)\,a_2^{(s)}+$$

$$+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-1}}\right)\sum_{s=2}^{s=n}(A_s)\,a_{n-1}^{(s)}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)\sum_{s=2}^{s=n}(A_s)\,a_n^{(s)}=0,$$

что вследствие (89) дает по сокращении

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1^{(0)}}-\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2^{(0)}}-\ldots-\left(\frac{\partial f}{\partial p_{n-1}}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}^{(0)}}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)=0.$$

Вспоминая формулу (82_2) § 72, из сказанного видим, что изучаемое нами обстоятельство может обнаружиться только в характеристическом случае.

Пересмотрим теперь все обстоятельства, при наличии которых мы не сможем решить задачи Коши.

Прежде всего при составлении интеграла $M^{(n-1)}$ возможно появление исключительного или одного из характеристических случаев, между прочим приводящего к интегралу $M^{(n)}$ вместо интеграла $M^{(n-1)}$.

Но кроме этого, может случиться, во-первых, что все элементы найденного интеграла $M^{(n-1)}$ будут особенными, и мы не сможем, поэтому, составить уравнения семейства характеристических линий; во-вторых, может случиться, что данное многообразие (83) измерения $n-1$ есть геометрическое место характеристических линий, определенных элементами соответствующего ему интеграла. Если мы, имея дело с этим случаем, не натолкнемся на случай, указанный первым, то по каждому элементу интеграла $M^{(n-1)}$ мы найдем характеристическую линию, но эта линия будет принадлежать многообразию (83) и геометрическим местом таких линий будет данное нам многообразие (83).

В этом случае мы будем называть интеграл $M^{(n-1)}$ характеристическим, а данное многообразие измерения $n-1$ характеристикой, принадлежащей решению.

Мы вернемся в главе седьмой к разбору исключительных случаев задачи Коши.

76. Примеры: 1) Полный интеграл уравнения

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 - \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) \tag{90}$$

есть

$$z = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2). \tag{91}$$

Мы получим характеристические линии уравнения (90), присоединив к (91) уравнения

$$b_2(x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) = 0, \quad b_3(x_1 - a_1) + (x_3 + a_3) = 0. \tag{91'}$$

Положив в уравнениях (91):

$$a_1 = 0,\ a_2 = t,\ a_3 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0, \tag{92}$$

мы получим характеристические линии

$$z = x_2 t - \frac{1}{2}t^2,\ x_1 + x_2 - t = 0,\ x_3 = 0,$$

геометрическое место которых

$$x_3 = 0,\ z = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2). \tag{93}$$

Ищем интеграл $M^{(2)}$. Положив

$$x_1^{(0)} = u,\quad x_2^{(0)} = v,\quad x_3^{(0)} = 0,\quad z^{(0)} = \frac{1}{2}(v^2 - u^2),$$

находим сначала, что

$$p_1^{(0)} = -u,\ p_2^{(0)} = v$$

и затем, из уравнения

$$\frac{1}{2}(v^2 - u^2) = -u^2 + v^2 - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}p_3^{(0)2},$$

что

$$p_3^{(0)} = \sqrt{2}\,u.$$

Отыскивая теперь $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, $a_3^{(0)}$, $b_2^{(0)}$, $b_3^{(0)}$, сначала находим

$$a_1^{(0)} = p_1^{(0)} = -u,\quad a_2^{(0)} = p_2^{(0)} = v,\quad a_3^{(0)} = p_3^{(0)} = \sqrt{2}\,u.$$

Далее

$$b_2^{(0)}\,(u+u) + v - v = 0 \qquad b_3^{(0)} 2\,u + \sqrt{2}\,u = 0,$$

т. е.

$$b_2^{(0)} = 0 \qquad b_3^{(0)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Уравнения характеристических линий

$$z = -x_1 u + x_2 v + \sqrt{2}\, u x_3 - \frac{1}{2}(v^2 - u^2),$$

$$x_2 - v = 0, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_1 + u) + x_3 + \sqrt{2}\, u = 0.$$

Исключение u и v приводит к решению:

$$z = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \sqrt{2}\, x_1 x_3 - x_3^2,$$

удовлетворяющему поставленным начальным условиям.

Многообразие (93) — геометрическое место характеристических линий уравнения, но не геометрическое место характеристических линий некоторого решения. Характеристические линии решения получаем из (91), выразив a_1, a_2, a_3, b_2, b_3 через два параметра так, чтобы было соблюдено условие

$$da_1 = b_2 da_2 + b_3 da_3. \tag{№}$$

Условие (№) должно сохраниться, если мы свяжем параметры характеристических линий решения еще одной зависимостью; между тем параметры (92) этому условию не удовлетворяют.

2) Рассмотрим уравнение

$$z = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 - \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

характеристические линии которого даны уравнениями:

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

$$b_2\,(x_1 - a_1) + x_2 - a_2 = 0, \quad b_3\,(x_1 - a_1) + x_3 - a_3 = 0.$$

Найдем решение, в котором

$$x_1 = 0, \; z = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} - \frac{1}{2}.$$

В рассматриваемом случае имеем

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = u, \quad x_3^{(0)} = v, \; z^{(0)} = \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{1}{2}$$

$$p_2^{(0)} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad p_3^{(0)} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\sqrt{u^2 + v^2} - \frac{1}{2} = \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{1}{2}\, p_1^{(0)2} - \frac{1}{2}, \; p_1^{(0)} = 0.$$

Отыскивая характеристические линии, прежде всего находим

$$a_1^{(0)}=p_1^{(0)}=0,\quad a_2^{(0)}=p_2^{(0)}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\ a_3^{(0)}=p_3^{(0)}=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Так как теперь

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0=0,$$

пишем остальные уравнения характеристических линий следующим образом:

$$c_1\frac{\partial V}{\partial a_2}+\frac{\partial V}{\partial a_1}=0,\ c_3\frac{\partial V}{\partial a_2}+\frac{\partial V}{\partial a_3}=0$$

и составив уравнения

$$c_1^{(0)}\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0+\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right)_0=0,\quad c_3^{(0)}\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right)_0+\left(\frac{\partial V}{\partial a_3}\right)_0=0,$$

т. е.

$$c_1^{(0)}\left(u-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)=0,\quad c_3^{(0)}\left(u-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)+$$
$$+v-\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=0,$$

находим

$$c_1^{(0)}=0,\quad c_3^{(0)}=-\frac{v}{u}.$$

Уравнения характеристических линий

$$z=\frac{x_2u}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{x_3v}{\sqrt{u^2+v^2}}-\frac{1}{2}$$
$$x_1=0,\ vx_2-ux_3=0.$$

Исключение u и v приводит к исходному многообразию, которое в данном случае характеристика.

77. Задачи, отличные от задачи Коши. Конус характеристических линий. Ставя задачу нахождения решения уравнения (3) по данному основанию, мы можем обобщить сказанное в § 65, взяв за основание вместо многообразия измерения $n-1$ многообазие измерения k:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(0)}&=\varphi_1\ (u_1,\ \ldots,\ u_k)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n^{(0)}&=\varphi_n\ (u_1,\ \ldots,\ a_k)\\ z^{(0)}&=\varphi\ \ (u_1,\ \ldots,\ u_k)\end{aligned}\right\}\qquad(83_1)$$

Правила, данные в § 74, оказываются применимыми с той только разницей, что для нахождения интеграла $M^{(n-1)}$ мы будем иметь вместо системы (84′) систему

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}=p_1^{(0)}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}+\ \dots\ +p_n^{(0)}\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_1}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_k}=p_1^{(0)}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_k}+\ \dots\ +p_n^{(0)}\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_k}\end{array}\right\}, \tag{84$_1'$}$$

в которой только k уравнений; вследствие этого в каждой точке основания аргументы $p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}$ зависят еще от $n-k-1$ параметров.

Уравнения (85), дающие $a_i^{(0)}$, $b_i^{(0)}$, остаются неизменными и дают возможность, как и прежде, построить семейство характеристических линий, зависящих от $n-1$ параметров. Если по исключении этих параметров получится поверхность, то эта поверхность будет интегральной: рассуждения § 74, установившие это обстоятельство, не зависели от тех предположений, которые могут быть сделаны об измерении основания. Вдоль основания эта поверхность не может иметь определенной касательной плоскости.

Пример. Найти решение уравнения:

$$z=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3-\frac{1}{2}(p_1{}^2+p_2{}^2-p_3{}^2),$$

заключающее многообразие:

$$x_1=t,\ x_2=0,\ x_3=0,\ z=t.$$

Полный интеграл уравнения

$$z=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3-\frac{1}{2}(a_1{}^2+a_2{}^2-a_3{}^2).$$

Уравнения характеристических линий находим, присоединяя уравнения

$$b_2\ (x_1-a_1)+x_2-a_2=0,\quad b_3\ (x_1-a_1)+x_3+a_3=0.$$

Положив

$$x_1^{(0)}=t,\ x_2^{(0)}=0,\ \ x_3^{(0)}=0,\ z_0=t,$$

прежде всего находим $p_1^{(0)}=1$. Пользуясь уравнением, получаем

$$t=t-\frac{1}{2}(1+p_2^{(0)^2}-p_3^{(0)^2}),$$

откуда заключаем, что можно положить

$$p_2^{(0)}=u,\quad p_3^{(0)}=\sqrt{1+u^2}.$$

Применяя процесс § 74, находим

$$a_1^{(0)}=1,\ a_2^{(0)}=u,\ a_3^{(0)}=\sqrt{1+u^2}$$

$$b_2^{(0)}(t-1)+0-u=0,\ b_3^{(0)}(t-1)+0+\sqrt{1+u^2}=0,$$

откуда

$$b_2^{(0)}=\frac{u}{t-1},\ b_3^{(0)}=-\frac{\sqrt{1+u^2}}{t-1}.$$

Уравнения семейства характеристических линий:

$$z=x_1+x_2u+x_3\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{u}{t-1}(x_1-1)+x_2-u=0,\ -\frac{\sqrt{1+u^2}}{t-1}(x_1-1)+x_3+$$
$$+\sqrt{1+u^2}=0.$$

Исключение u и t приводит к решению:

$$z=x_1-\sqrt{x_3^2-x_2^2},$$

в котором при $x_2=0, x_3=0$ нет определенной касательной плоскости.

Отметим в заключение, что положив

$$x_1=x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_n=x_n^{(0)},\ z=z^{(0)},$$

где $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}$ постоянные, взяв другими словами, за основание точку

$$m\,(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,x_n^{(0)},\ z^{(0)}), \tag{94}$$

мы при всяких $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ удовлетворим условию

$$dz^{(0)}=p_1^{(0)}dx_1^{(0)}+\ldots+p_n^{(0)}\,dx_n^{(0)}.$$

Аргументы $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ будут связаны одною зависимостью:

$$f\,(x_1^{(0)},\ x_2,\ \ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_1^{(0)},\ \ldots,\ p_n^{(0)})=0;$$

$n-1$ из них останутся произвольными, и мы найдем интеграл $M^{(n-1)}$, в котором именно они и являются $n-1$ произвольными аргументами.

Нахождение характеристических линий и исключение из них этих параметров приведет к решению уравнения, которое есть геометрическое место характеристических линий, проходящих через точку m — конус таких линий с вершиной в m.

Уравнение этого конуса можно найти и непосредственно исходя от уравнений

$$\left.\begin{aligned} &W\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ z, a_1^{(0)},\ a_2^{(0)},\ \ldots,\ a_n^{(0)})=0\\ &b_2^{(0)}\frac{\partial W}{\partial a_1^{(0)}}+\frac{\partial W}{\partial a_2^{(0)}}=0,\ \ldots,\ b_n^{(0)}\frac{\partial W}{\partial a_1^{(0)}}+\frac{\partial W}{\partial a_n^{(0)}}=0\end{aligned}\right\} \tag{86'}$$

характеристических линий.

Записав, что линия (86′) проходит через точку m, мы присоединим к (86′) уравнения

$$\left.\begin{aligned} &W\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}\right)=0 \\ &b_2^{(0)}\left(\frac{\partial W}{\partial a_1^{(0)}}\right)_0+\left(\frac{\partial W}{\partial a_2}\right)_0=0, \quad \ldots, \quad b_n^{(0)}\left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right)_0+\left(\frac{\partial W}{\partial a_n}\right)_0=0 \end{aligned}\right\} \quad (85')$$

Исключая из 2п уравнений (86′) и (85′) $2n-1$ параметров

$$a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}, b_2^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)},$$

мы и получим конус характеристических линий.

78. Преобразование уравнения в не содержащее неизвестной функции. Подобно тому, как мы делали это в § 13 и 42, мы можем заменить интегрирование уравнения

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n\right)=0, \tag{3}$$

содержащего явно неизвестную функцию z, интегрированием другого, неизвестной функции явно не содержащего.

Действительно, отыскивая вместо z уравнение

$$W\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z\right)=0, \tag{95}$$

которому оно удовлетворяет, мы получим для производных от z выражения

$$p_1=-\frac{\dfrac{\partial W}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}, \quad \ldots, \quad p_n=-\frac{\dfrac{\partial W}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}, \tag{96}$$

из которых, конечно, должна быть исключена z при помощи уравнения (95). Значит, результат исключения z при помощи (95) из уравнения

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, -\frac{\dfrac{\partial W}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\dfrac{\partial W}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}\right)=0 \tag{97}$$

должен быть тожеством.

Если мы найдем значение W как функцию от $x_1, \ldots, x_n, z$, удовлетворяющую уравнению (97) и, приравняв его нулю, составим уравнение (95), то мы, конечно, найдем решение уравнений (3). Но следует думать, что поступая таким образом, мы некоторые решения потеряем: для решения уравнения (3) равенство (97) должно делаться тожеством только при посредстве (95). Однако, не трудно убедиться, что, действуя указанным образом, мы можем потерять только особенные решения уравнения (3).

Действительно, если некоторое решение принадлежит семейству решений, зависящих от параметра, оно потеряно не будет.

Положим, что z такое решение и получается из решения

$$z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) \tag{98}$$

по замене a нулем. Решая уравнение (98) относительно a, мы получим уравнение

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = a, \tag{99}$$

в котором W удовлетворяет уравнению (97). Уравнение (97) не зависит именно от a и, значит, если удовлетворяется при посредстве (99), зависящего от a, то удовлетворяется тожественно.

Положив в (98) $a = 0$, мы получим уравнение, дающее данное решение. Если теперь z не особенное решение, то оно может быть получено из некоторого полного интеграла

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$$

путем присоединения нескольких зависимостей

$$\begin{gathered} \omega_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0. \end{gathered}$$

Заменяя одну из них, скажем первую, на

$$\omega_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \alpha,$$

мы заменим z решением, зависящим от α и обращающимся в z при $\alpha = 0$; значит, z не теряется при замене уравнения (3) уравнением (97).

79. Задача интегрирования уравнения. Из сказанного ясно, что задачу интегрирования уравнения (3) можно поставить двояким образом: можно искать его полный интеграл, знание которого даст бесчисленное множество решений уравнения и позволит решить задачу Коши, или можно сразу искать, минуя полный интеграл, характеристические линии, знание которых позволит решить задачу Коши и составить полный интеграл, найдя, например, решение, в котором при

$$x_1 = x_1^{(0)} : z = a + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.$$

Первая метода будет изложена в главе шестой под именем первой методы Якоби, вторая будет изложена в главе седьмой под именем методы Коши.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

ПЕРВАЯ МЕТОДА ЯКОБИ.

80. Теорема Якоби. Метода Якоби прилагается к уравнениям, приготовленным особым образом.

Положим, дано уравнение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0. \tag{1}$$

Положим, сначала, что уравнение зависит от z. Применяя к уравнению сказанное в § 78, преобразуем его в уравнение, не зависящее от неизвестной функции.

Положив, что z удовлетворяет уравнению

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0, \tag{2}$$

ищем W из уравнения:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, -\frac{\frac{\partial W}{\partial x_1}}{\frac{\partial W}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\frac{\partial W}{\partial x_n}}{\frac{\partial W}{\partial z}}\right) = 0, \tag{3}$$

пренебрегая таким образом особенными решениями, которые могут быть потеряны.

Предположим, что функция f неоднородная функция от $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Обозначая знаками

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \tag{4}$$

производные от W по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, решаем уравнение (3) относительно $\frac{\partial W}{\partial z}$ и даем ему вид

$$\frac{\partial W}{\partial z} + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0. \tag{5}$$

Отметим, что если уравнение (5) получено из уравнения (1) указанным образом, то в нем H однородная функция первого измерения от аргументов (4). Действительно, левая часть уравнения (3), очевидно, однородная функция нулевого измерения относительно производных от W. Вследствие этого, уравнение (5) не должно меняться, если мы все производные от W умножим на одно и то же число, откуда ясно, что H должно приобретать некоторый множитель в случае умножения на него аргументов (4).

Примечание. Заменив уравнение (3) уравнением (5) мы, в случае, когда уравнение (3) дает несколько значений для $\frac{\partial W}{\partial z}$, делаем выбор изучаемого уравнения. Этим самым мы предрешаем и выбор ветви полного интеграла.

Мы предположили, что в уравнении (1) функция f неоднородная функция от аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$; когда это условие не соблюдено, из уравнения (3) нельзя найти $\frac{\partial W}{\partial z}$, так как эта производная, как общий множитель величин, стоящих на местах этих производных, из уравнения (3) сокращается.

В этом случае, приводя к виду (5), надо уравнение (3) решать относительно одного из аргументов

$$q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Если уравнение (1) не зависит от z, мы будем давать ему вид уравнения (5), решая его относительно одной из производных $p_1, p_2, \ldots, p_n$; в этом случае, конечно, H уже не будет однородной функцией от входящих в нее производных.

Мы установим методу Якоби, не делая предположения, что H однородная функция от аргументов (4).

Теорема Якоби. *Дано уравнение*

$$\frac{\partial W}{\partial z}+H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, q_1, q_2, \ldots, q_n)=0; \tag{5}$$

составим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dz}=\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dz}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Задачи интегрирования уравнения (5) *и системы* (6) *равносильны.*

Мы докажем, другими оловами, что когда известен полный интеграл уравнения (5), можно составить все интегралы системы (6) и, обратно, когда составлены все интегралы системы (6), можно составить полный интеграл уравнения (5).

Примечание. Составляя по правилам § 70 уравнения характеристических линий для уравнения (5), получаем, обозначив для удобства через q производную $\frac{\partial W}{\partial z}$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial q_1}}=\ldots=\frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial q_n}}=\frac{dz}{1}=-\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}}=\ldots=-\frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}=\\ =-\frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial z}}=\frac{dW}{\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{\partial H}{\partial q_k}q_k+q}\end{aligned}\right\}$$

$$q+H=0,$$

что приводит к системе (6) и, кроме того, дает уравнения

$$\frac{dq}{dz}=-\frac{\partial H}{\partial z}, \quad \frac{dW}{dz}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial H}{\partial q_k}q_k+q=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial H}{\partial q_k}q_k-H.$$

81. Теорема об интегрировании системы. Установим сначала первую часть теоремы: если известен полный интеграл уравнения (5), то можно составить все интегралы системы (6).

Так как в уравнении (5) число независимых переменных $n+1$, полный интеграл его зависит от $n+1$ произвольной постоянной; так как уравнение (5) не содержит явно неизвестной функции W, одна из постоянных входит в этот полный интеграл, как указано в § 57, аддитивно.

Вследствие этого полный интеграл уравнения (5) имеет вид:

$$W = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) - c. \tag{7}$$

При этом, как вытекает из сказанного в § 57, уравнения

$$q_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1},\ q_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2},\ \ldots,\ q_n = \frac{\partial V}{\partial x_n} \tag{8}$$

должны быть разрешимы относительно $a_1, a_2, \ldots, a_n$; иначе из них можно было бы эти постоянные исключить и получить уравнение, не зависящее от $\frac{\partial W}{\partial z}$. Напомним, что в § 57 было установлено тожество

$$\frac{D\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{D(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \frac{D\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n}\right)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{9}$$

Из сделанного замечания о возможности найти из уравнений (8) постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вытекает, что ни один из якобианов тожества (9) не равен тожественно нулю.

Вводя новые постоянные $b_1, \ldots, b_n$, составляем равенства

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = q_i,\quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,\quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Докажем, что равенства (10) образуют полное собрание общих решений системы (6); причем $2n$ постоянных интегрирования равны

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,\quad b_1, b_2, \ldots, b_n. \tag{11}$$

Ранее чем приступать к доказательству этого утверждения, проверим, что уравнение (10) обладает двумя свойствами, указанными в § 2, без которых собрание (10) не может быть собранием общих решений для какой-либо системы дифференциальных уравнений.

1) Система (10) может быть решена относительно

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1, q_2, \ldots, q_n. \tag{12}$$

Последние n аргументов выражены явно через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и первые n аргументов первыми уравнениями системы (10); что же касается первых n аргументов, то их можно найти из последних уравнений (10), так как правый из определителей (9) не нуль.

2) Система (10) может быть решена относительно постоянных (11). Последние n из этих постоянных выражены явно через первые n и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ последними уравнениями системы (10); что же касается первых n постоянных (11), то их можно найти из первых уравнений (10), так как левый из определителей (9) не нуль.

Установив это, приступаем к доказательству теоремы.

Подставляя в уравнение (5) вместо производных от W их значения, получаем тожество

$$\frac{\partial V}{\partial z} + H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) \equiv 0, \tag{13}$$

которому мы дадим вид

$$\frac{\partial V}{\partial z}+(H)=0, \tag{13}$$

обозначая буквой (H) результат замены в функции H аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ их значениями.

Левая часть тожества (13) есть функция от аргументов

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n.$$

Дифференцируя его по первым аргументам, получаем n тожеств:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x_i}+\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)+\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_i}=0,\ (i=1,2,\ldots,n). \tag{14}$$

Дифференцируя его по последним из этих аргументов, получаем новые n тожеств:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial a_i}+\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial a_i}=0,\quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{15}$$

Подготовив таким образом доказательство, обращаемся к системе (10). Найдя из этой системы аргументы (12) как функции z и постоянных (11), подставляем их в уравнения (10) и получаем $2n$ тожеств.

Обозначая знаком $[F]$ результат замены аргументов (12) указанными их выражениями через z, мы даем упомянутым тожествам вид:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\right]\equiv[q_i]\quad\left[\frac{\partial V}{\partial a_i}\right]\equiv b_i. \tag{10'}$$

Если мы выполним и в тожествах (14) и (15) указанную подстановку, то мы дадим им вид

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x_i}\right]+\left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right]+\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial H}{\partial q_k}\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\partial x_i}\right]\equiv 0 \tag{14'}$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial a_i}\right]+\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial H}{\partial q_k}\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_i}\right]\equiv 0, \tag{15'}$$

так как вследствие первых равенств (10′) очевидно

$$[(F)]=[F].$$

Дифференцируем сначала последние n тожеств (10′) по z. Получаем

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial a_i}\right]+\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial a_i}\right]\frac{d\,[x_k]}{dz}\equiv 0. \tag{16}$$

Трактуя уравнения (15′) как систему уравнений с неизвестными $\left[\frac{\partial H}{\partial q_k}\right]$, видим, так как определитель при неизвестных, равный определителю (9), не нуль, система имеет единственное решение. Но система (16) отличается от системы (15′) только тем, что в ней неизвестные обозначены знаками $\frac{d\,[x_k]}{dz}$

Следовательно имеем:

$$\frac{d\,[x_k]}{dz} \equiv \left[\frac{\partial H}{\partial q_k}\right], \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Дифференцируем теперь по z первые из n тожеств (10′). Получаем

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial z}\right] + \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i}\right] \frac{d\,[x_k]}{dz} \equiv \frac{d\,[q_i]}{dz}, \ (k=1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Пользуясь установленными равенствами (17), даем тожествам (18) вид:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial z}\right] + \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i}\right] \left[\frac{\partial H}{\partial q_k}\right] \equiv \frac{d\,[q_i]}{dz}, (k=1, 2, \ldots, n). \tag{18′}$$

Сравнение полученных равенств с соответственными тожествами (14′) дает

$$\frac{d\,[q_i]}{dz} \equiv -\left[\frac{\partial H}{\partial x_i}\right], \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Равенства (18) и (19) говорят, что замена в уравнениях (6) аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их значениями, найденными из последних равенств (10), а аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ их выражениями, данными первыми равенствами (10), обращает уравнения (6) в тожества, что и требовалось доказать.

82. Теорема об интегрировании уравнения. Укажем, прежде всего, правило для составления полного интеграла уравнения (5) по собранию общих решений системы (6).

Положим равенства

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(z, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \\ q_i &= \psi_i(z, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

в которых

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, \tag{21}$$

произвольные постоянные, образуют собрание общих решений системы

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{6}$$

Мы, однако, за (20) возьмем не произвольное собрание общих решений, а собрание Коши, считая, что $b_1, \ldots, b_n$ суть начальные значения $x_1, \ldots, x_n$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ начальные значения $q_1, q_2, \ldots, q_n$, отвечающие $z = z_0$.

При таком предположении из уравнений (20) имеем:

$$\text{если} \quad z = z_0, \quad \text{то} \quad x_i = b_i \quad p_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Из уравнений (20) можем найти все постоянные (21); иначе (20) не было бы собранием общих решений системы (6). Отметим, в частности, что из первых n уравнений (20) можно выразить $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в функции от z, $a_1\, a_2, \ldots, a_n$; действительно, при $z = z_0$ они обращаются в первые n уравнений (22), из которых, очевидно, можно найти $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Значит, коли система из первых n уравнений (20) разрешима относительно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ при частном значении z, то она разрешима относительно этих аргументов при произвольном значении z.

Основываясь на этом замечании, имея дело с любой функцией

$$\Phi\,(x_i, q_i, z, a_i, b_i),$$

мы можем при помощи системы (20) преобразовывать ее по своему усмотрению либо в функцию от z, a_i, b_i, либо в функцию от x_i, q_i, z, либо в функцию от x_i, z, a_i:

$$\Phi\,(x_i, q_i, z, a_i, b_i) = \Phi_1\,(x_i, q_i, z) = \Phi_2\,(z, a_i, b_i) = \Phi_3\,(x_i, z, a_i).$$

Переходим теперь к описанию правила для составления полного интеграла. Составляем функцию

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\, q_i - H. \tag{23}$$

Эту функцию от x_i, z, q_i переделываем, согласно со сказанным, в функцию от z, a_i, b_i. Условимся обозначать ее знаком (U). Считая, что a_i, b_i постоянны, вычисляем интеграл

$$\int_{z_0}^{z} (U)\, dz.$$

Составляем далее сумму

$$V = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \int_{z_0}^{z} (U)\, dz \tag{24}$$

и эту сумму, согласно со сказанным, из функции от z, a_i, b_i переделываем в функцию от x_i, z, a_i.

Полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial z} + H\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, q_1, \ldots, q_n) = 0, \tag{5}$$

дается равенством

$$W = V - c, \tag{25}$$

где V указанным образом переделанная функция (24). Отметим, что если (25) действительно решение уравнения (5), то W его полный интеграл. В самом деле, при $z = z_0$, W обращается в

$$W = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - c, \tag{25'}$$

так как на основании первых n равенств (22) функции от z, x_i, a_i, обозначенные знаками b_i, обращаются в x_i при $z = z_0$. О решениях же, зависящих от нужного числа произвольных постоянных и имеющих начальное значение вида (25'), мы установили в § 57, что они образуют полные интегралы.

Отметим еще, что когда H однородная функция первого измерения от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, что имеет место, если уравнение (5) получено преобразованием уравнения (1), то функция U тожественно равна нулю.

Для доказательства того, что (25) действительно полный интеграл уравнения (5), надо суметь найти производные

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}, \frac{\partial W}{\partial z} \tag{26}$$

и установить справедливость тожества

$$\frac{\partial W}{\partial z} + H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) \equiv 0. \tag{27}$$

Приступая к нахождению производных (26), условимся обозначать знаками „d" дифференциалы, взятые в предположении, что переменно только z, а аргументы a_i, b_i постоянны; в таком значении встречаются в уравнениях (6) dx_i, dq_i; далее, условимся обозначать знаком „δ" дифференциалы, взятые в предположении, что z постоянно, наконец, знаком Δ будем обозначать дифференциалы, взятые по всем аргументам. Мы будем иметь

$$\Delta x_i = dx_i + \delta x_i, \quad \Delta W = dW + \delta W. \tag{28}$$

Вычисляем

$$dW \text{ и } \delta W.$$

Первый из них находим сразу, дифференцируя (24):

$$dW = (U)\, dz. \tag{29}$$

Для вычисления второго имеем

$$\delta W = \delta V = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \delta b_i + \sum_{i=1}^{i=n} b_i \delta a_i + \delta \int_{z_0}^{z} (U)\, dz. \tag{30}$$

Но

$$\delta \int_{z_0}^{z} (U)\, dz = \int_{z_0}^{z} \delta (U) dz \tag{31}$$

и $$\delta(U)=\sum_{i=1}^{i=n}\delta\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}q_i\right)-\delta H=\sum_{i=1}^{i=n}\delta\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)(q_i)+$$
$$+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta(q_i)-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta(q_i)-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)\delta(x_i). \quad (32)$$

Пользуясь уравнениями (6) из (32) после сокращения средних сумм получаем

$$\delta(U)=\sum_{i=1}^{i=n}\delta\frac{d(x_i)}{dz}(q_i)+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d(q_i)}{dz}\delta(x_i)=\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{d\delta(x_i)}{dz}(q_i)+\right.$$
$$\left.+\frac{d(q_i)}{dz}\delta(x_i)\right\}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d(q_i)\delta(x_i)}{dz}. \quad (32')$$

Подставляя это значение $\delta(U)$ в (31), находим:

$$\delta\int_{z_0}^{z}(U)\,dz=\int_{z_0}^{z}\delta(U)\,dz=\int_{z_0}^{z}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d(q_i)\delta(x_i)}{dz}dz=\sum_{i=1}^{i=n}(q_i)\delta(x_i)\Big]_{z_0}^{z}=$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}(q_i)\delta(x_i)-\sum_{i=1}^{i=n}a_i\,\delta b_i, \quad (31')$$

так как при $z=z_0$

$$q_i=a_i,\quad x_i=b_i.$$

Вследствие всего этого получаем

$$\delta(W)=\sum_{i=1}^{i=n}a_i\,\delta b_i+\sum_{i=1}^{i=n}b_i\,\delta a_i+\sum_{i=1}^{i=n}(q_i)\,\delta(x_i)-\sum_{i=1}^{i=n}a_i\,\delta b_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}b_i\,\delta a_i+\sum_{i=1}^{i=n}(q_i)\,\delta(x_i) \quad (30')$$

и значит, пользуясь снова уравнениями (6),

$$\Delta(W)=\delta(W)+d(W)=\sum_{i=1}^{i=n}b_i\,\delta a_i+\sum_{i=1}^{i=n}(q_i)\,\delta(x_i)+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)(q_i)dz-$$
$$-(H)dz=\sum_{i=1}^{i=n}b_i\,\delta a_i+\sum_{i=1}^{i=n}(q_i)\,\delta(x_i)+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d(x_i)}{dz}(q_i)\,dz-(H)\,dz=$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}b_i\,\delta a_i+\sum_{i=1}^{i=n}(q_i)\,[\delta(x_i)+d(x_i)]-H\,dz,$$

т. е.

$$\Delta(W)=\sum_{i=1}^{i=n} b_i \delta a_i+\sum_{i=1}^{i=n}(q_i)\,\Delta(x_i)-(H)\,dz. \tag{33}$$

Во всех выкладках до сих пор мы трактовали W, x_i, q_i как функции от z и постоянных a_i, b_i.

Выразив

$$b_1, b_2, \ldots, b_n \tag{34}$$

при помощи первых равенств (20) через аргументы

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, \tag{35}$$

преобразуем (W) в функцию W этих аргументов, данную равенством (25); функция (H) обратится в функцию H от них, заданную при посредстве функций

$$q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

полученных из вторых равенств (20) по исключении из них (34). Равенство (33) принимает вид

$$\Delta W=\sum_{i=1}^{i=n} b_i \delta a_i+\sum_{i=1}^{i=n} q_i \Delta x_i-H\,dz, \tag{33'}$$

где теперь (34) функции от (35), и из него мы заключаем:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i}=q_i, \frac{\partial W}{\partial z}=-H(x_1,\ldots,x_n,z,q_1\ldots,q_n), \frac{\partial W}{\partial a_i}=b_i. \; (i=1,2,\ldots,n) \tag{36}$$

Пользуясь первыми n равенствами из $(n+1)$-го, выводим, что

$$\frac{\partial W}{\partial z}+H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right)=0,$$

а это и требовалось доказать.

Итак теорема Якоби установлена полностью.

83. Примеры. Интегрирование уравнений динамики системы. Отлагая выводы из полученных результатов, разберем несколько примеров.

1) Проинтегрировать уравнение

$$p_1 p_2-4z=0. \tag{37}$$

Отыскивая вместо z уравнение

$$W=0,$$

которому она удовлетворяет, имеем

$$p_1=-\frac{\partial W}{\partial x_1}:\frac{\partial W}{\partial z}=-q_1:\frac{\partial W}{\partial z}, \; p_2=-\frac{\partial W}{\partial x_2}:\frac{\partial W}{\partial z}=-q_2:\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Уравнение (37) принимает сначала вид

$$q_1 q_2-4z\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=0$$

и затем обращается в уравнение, к которому применима метода Якоби:

$$\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_1 q_2}{z}}=0. \tag{37'}$$

Система (6) имеет вид:

$$\frac{dx_1}{dz}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{q_2}{q_1}\cdot\frac{1}{z}},\ \frac{dx_2}{dz}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{q_1}{q_2}\cdot\frac{1}{z}},\ \frac{dq_1}{dz}=0,\ \frac{dq_2}{dz}=0.$$

Полагаем $z_0=0$. Интегралы Коши последних двух уравнений:

$$q_1=a_1,\quad q_2=a_2.$$

Из первых двух уравнений, если b_1 и b_2 значения x_1 и x_2 при $z=0$:

$$x_1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}z}=b_1,\quad x_2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}z}=b_2.$$

Функция U в рассматриваемом случае равна нулю. Полный интеграл уравнения (37')

$$W=a_1 b_1+a_2 b_2-c=a_1\left(x_1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}z}\right)+$$
$$+a_2\left(x_2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}z}\right)-c=a_1 x_1+a_2 x_2+\sqrt{a_1 a_2 z}-c.$$

Приравняв W нулю и деля обе части равенства на c, получаем полный интеграл уравнения (57):

$$a_1 x_1+a_2 x_2+\sqrt{a_1 a_2 z}=1.$$

Мы получили для W однородную функцию первого измерения от a_1, a_2, c. В одном из следующих параграфов мы покажем, что если H однородная функция первого измерения от q_i, это обстоятельство всегда имеет место.

2) Проинтегрировать уравнение

$$q_1 q_2+x_1 x_2=0. \tag{38}$$

Дав уравнению вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{x_1 x_2}{q_2}=0,\qquad H=\frac{x_1 x_2}{q_2},$$

получаем систему (6) в виде

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{x_1 x_2}{q_2^2},\qquad \frac{dq_2}{dx_1}=-\frac{x_1}{q_2}.$$

Выбирая нуль за начальное значение x_1 и обозначая через b и a начальные значения x_2 и q_2, легко находим:

$$q_2^2+x_1^2=a^2,\quad x_2=\sqrt{a^2-x_1^2}\,\frac{b}{a}. \tag{39}$$

В рассматриваемом случае

$$U = -\frac{x_1 x_2}{q_2^2} q_2 - \frac{x_1 x_2}{q_2} = -\frac{2x_1 x_2}{q_2}, \quad (U) = -2x_1 \frac{b}{a}.$$

Полный интеграл получается из

$$z = ab - \int_0^{x_1} 2x_1 \frac{b}{a} dx_1 - c = ab - x_1^2 \frac{b}{a} - c$$

исключением b, найденной из второго уравнения (39). Выполняя выкладки, получаем

$$z = x_2 \sqrt{a^2 - x_1^2} - c.$$

Отметим, что полный интеграл уравнения (38) можно было бы найти и при помощи следующих соображений (см. пример 3, § 58):

Положив $q_1 = ax_1$, из уравнения (38) находим $q_2 = -\frac{1}{a_1} x_2$.

Система уравнений

$$q_1 = a_1 x_1, \quad q_2 = -\frac{1}{a_1} x_2$$

очевидно замкнутая и дает

$$z = \frac{1}{2} a_1 x_1^2 - \frac{1}{2a_1} x_2^2 + a_2.$$

3) Покажем, в заключение, следуя Якоби, что к интегрированию системы (6), и значит к уравнению (5), сводится, в общем виде задача движения системы материальных точек под действием сил, имеющих потенциал, если как связи, ограничивающие свободу системы, так и потенциал действующих сил, не зависят от времени. Положим, что система k материальных точек находится под действием сил, имеющих потенциал U и связана $3k-n$ условиями

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, z_k) = 0, \ldots, f_{3k-n}(x_1, x_2, \ldots, z_k) = 0. \tag{40}$$

Движение управляется уравнениями

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{s=3k-n} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{s=1}^{s=3k-n} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_{s=1}^{s=3k-n} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial z_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{41}$$

где множители

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{3k-n}$$

характеризуют влияние реакций связей. Эти множители выражаются рационально через координаты точек и их производные по времени t; для нахождения этих выражений достаточно два раза продифференцировать по времени уравнения (40) и исключить после этого вторые производные от координат точек при помощи уравнений (41).

Выразим координаты точек через функции

$$x_i=\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n),\ y_i=\psi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n),\ z_i=\chi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad (42)$$

от n параметров

$$q_1, q_2, \ldots q_n, \quad (43)$$

выбирая эти параметры так, чтобы уравнения (40) удовлетворялись тожественно после замены x_i, y_i, z_i их значениями (42).

Чтобы определить движение системы, достаточно определить параметры (43) как функции от t. Для составления уравнений, определяющих эти последние функции, можно использовать принцип Гамильтона.

Положим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=k} m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2) \quad (44)$$

— живая сила системы. Пользуясь (42), мы можем выразить T через параметры (43) и их производные по t. Так как производные от x_i, y_i, z_i линейные однородные функции от производных от параметров (43), то живая сила T, будучи функцией от (43), будет однородной функцией второй степени от их производных. Использовав уравнения (42), можно также и потенциальную функцию выразить через аргументы (43).

Заменяя аргументы (43) какими-нибудь функциями от t, переводящими систему из некоторого положения в другое, вычисляем интеграл

$$\int_{t_0}^{t}(T+U)\,dt.$$

Из всяких выборов функций (43), то, которое отвечает действительному движению, удовлетворяет уравнению,

$$\delta\int_{t_0}^{t}(T+U)\,dt=0. \quad (45)$$

Составляя уравнение, имеем

$$\delta\int_{t_0}^{t}(T+U)\,dt=\int_{t_0}^{t}(\delta T+\delta U)\,dt=\int_{t_0}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i'+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i\right\}dt.$$

Но

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i'\,dt=\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\,\frac{d\delta q_i}{dt}\right)dt=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i\Bigg|_{t_0}^{t}-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta q_i\right)dt=-\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q_i'}\,\delta q_i\right)dt,$$

так как на граничных положениях системы все вариации δq_i равны нулю.

Итак уравнение (45) принимает вид:

$$\int_{0}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)+\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right\}dt$$

и влечет за собой справедливость n уравнений:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i},\qquad (i=1,2,\ldots,\text{п}).\qquad(46)$$

Вводим в рассмотрение вместо производных q_i' переменные

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial q_i'},\qquad (i=1,\,2,\ldots,n).\qquad(47)$$

Так как правые части уравнений (47) линейные функции от q_i', эти производные могут быть выражены через $p_1,\ldots,p_n$.

Если

$$q_i'=K_i,\qquad (i=1,\,2,\ldots,n),\qquad(48)$$

искомые выражения, то уравнениями для нахождения аргументов (43) будут уравнения (48) и уравнения

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i},\qquad (i=1,\,2,\ldots,n).\qquad(49)$$

Живую силу T можно также выразить через новые неизвестные p_i, исключив из ее выражения производные q_i' при помощи равенств (48). Обозначим через (T) то, что получится после такого исключения:

$$T=T(q_i,q_i')=(T(q_i,p_i))=(T).\qquad(50)$$

Наша ближайшая задача преобразовать уравнения (48) и (49). Из (50) имеем

$$dT=d\,(T).\qquad(51)$$

Так как T однородная функция второго измерения от q_i', то

$$2\,T\equiv\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T}{\partial q_i'}q_i',\quad T\equiv\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T}{\partial q_i'}q_i'-T.$$

Дифференцируя второе тождество, получаем

$$dT = \sum_{i=1}^{i=n} d\frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T}{\partial q_i'} dq_i' - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T}{\partial q_i'} dq_i' = \sum_{i=1}^{i=n} d\frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i$$

и, вследствие (47),

$$dT = \sum_{i=1}^{i=n} q_i' \, dp_i - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i .$$

С другой стороны,

$$d(T) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial (T)}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial (T)}{\partial q_i} dq_i .$$

Подставляя в (51), заключаем, что

$$q_i' = \frac{\partial (T)}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial (T)}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (52)$$

В силу второго соотношения (52) равенства (49) принимают вид:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (T) - U}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (53)$$

если положить

$$H = (T) - U.$$

Первые равенства (52) не отличны от уравнений (48). Так как U не зависит от q_i', U не зависит и от p_i, и мы имеем,

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Вследствие этого первым из равенств (52) можно дать вид:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (T) - U}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Итак движение системы точек управляется системой:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = (T) - U. \quad (54)$$

Интегрирование же системы (54) равносильно интегрированию одного уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \; (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (55)$$

Итак, решение задачи о движении системы в указанном чрезвычайно общем случае сводится к интегрированию одного уравнения того типа, которому посвящена эта глава.

Впоследствии будут указаны приемы, позволяющие интегрировать уравнение вида (55), не прибегая к составлению и интегрированию системы (54); вследствие этого замечания, замена системы (54) уравнением (55) может оказаться полезной.

84. Замечание об интегралах системы (6). Возвращаемся к исследованию системы (6). Положим, что найден интеграл

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = h_1 \tag{56}$$

системы

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Если (56) интеграл системы, то на основании (6)

$$d\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} dz + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} dq_i = 0.$$

Исключая при помощи (6) dx_i и dq_i и сокращая на dz, получаем

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} = 0, \tag{57}$$

т. е. что Φ_1 есть решение линейного уравнения (57), которому можно дать вид:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + (H, \Phi_1) = 0. \tag{57'}$$

Если функция Φ_1 не зависит от z, то последнее равенство имеет вид:

$$(H, \Phi_1) = 0.$$

Положим, что имеется еще интеграл системы (6)

$$\Phi_2 = h_2, \tag{56'}$$

в котором функция Φ_2 также зависит от z. Тогда скобка

$$(\Phi_1, \Phi_2)$$

также левая часть интеграла системы (6). Действительно, по тожеству Якоби:

$$(H, (\Phi_1, \Phi_2)) + (\Phi_1, (\Phi_2, H)) + (\Phi_2, (H, \Phi_1)) \equiv 0. \tag{58}$$

Так как вследствие того, что (56) и (56′) интегралы системы

$$(H, \Phi_1) \equiv 0, \quad (H, \Phi_2) = -(\Phi_2, H) \equiv 0;$$

из тожества (58) имеем:

$$(H, (\Phi_1, \Phi_2)) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Сказанное можно обобщить и применить к интегралам (56), в которых функция Φ зависит от z.

Приведем в соответствие аргументу z аргумент q, подобно тому, как в скобке Пуассона аргументу x_i соответствует аргумент q_i, и введем в рассмотрение функцию

$$H_1 = q + H.$$

Имеем

$$(H_1, \Phi_1) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial H_1}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + (H, \Phi_1),$$

так как Φ_1 очевидно от q не зависит. Значит, уравнение (57′) имеет вид:

$$(H_1, \Phi_1) = 0. \tag{57′}$$

Отсюда, повторяя только что выполненные рассуждения, можно убедиться, что если (56′) какой-нибудь другой интеграл системы (6), то очевидно

$$(\Phi_1, \Phi_2) = h_3$$

тоже интеграл системы (6). Мы, впрочем, не утверждаем, что этот интеграл не зависит от интегралов (56) и (56′) и, в частности, что скобка Пуассона в левой его части не постоянное.

85. Случай, когда H однородная функция первого измерения от аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n$. В примере 1 § 83 мы видели, что в этом случае V однородная функция первого измерения от постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Не трудно убедиться, что это обстоятельство всегда имеет место, когда H однородная функция первого измерения от аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Действительно, в этом случае, по формуле Эйлера

$$U = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i - H \equiv 0.$$

Значит, в этом случае имеем

$$V = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n, \tag{59}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ функции от аргументов (35). Но по формулам (36):

$$b_1 = \frac{\partial V}{\partial a_1},\ b_2 = \frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots, b_n = \frac{\partial V}{\partial a_n};$$

значит равенство (59) имеет вид:

$$V = \frac{\partial V}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} a_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} a_n \tag{60}$$

и говорит, что V однородная функция первого измерения от аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

86. О характеристических линиях уравнения (5). Если

$$W = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_n) - c \qquad (7)$$

какой-нибудь полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial z} + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, q_1, q_2, \ldots q_n) = 0, \qquad (5)$$

то по сказанному в § 69 система характеристических линий для уравнения (5) определяется равенствами:

$$W = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_n) - c \qquad (61)$$

$$b_1 = \frac{\partial V}{\partial a_1},\ b_2 = \frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots,\ b_n = \frac{\partial V}{\partial a_n}; \qquad (62)$$

при составлении равенств (62) мы трактовали постоянную c так, как в § 69 трактовалась постоянная a, а постоянные $a_1, \ldots, a_n$ так, как там трактовались постоянные $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Метода Якоби учит, как составить полный интеграл (61), а, значит, позволяет и составить уравнения (62).

Мы покажем теперь, что уравнения (62) нами в действительности найдены ранее составления уравнения (61). Положим, как в § 82, что нами найдено собрание общих решений Коши системы (6). Положим

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(z, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \\ q_i &= \psi_i(z, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (20)$$

это собрание. Не трудно убедиться, что первые n из них, уравнения

$$x_i = \varphi_i(z, a_1, \ldots, a_n\, b_1, \ldots, b_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (63)$$

не что иное, как уравнения (62).

Чтобы убедиться в этом, вспомним правило для составления полного интеграла (61).

Составляя этот полный интеграл, надо прежде всего решить уравнения (63) относительно $b_1, \ldots, b_n$; положим, что, решая их, мы получим

$$b_i = \omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (63')$$

Затем надо составить функцию

$$U = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial H}{\partial q_k} q_k - H;$$

заменить в этой функции x_i и q_i их выражениями (20) через z, a_i, b_i; взять интеграл

$$\int_{z_0}^{z} (U)\, dz;$$

составить сумму

$$V = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \int_{z_0}^{z} (U) dz$$

и функцию

$$W = V - c;$$

исключить из последней функции $b_1, b_2, \ldots b_n$ при помощи уравнений (63′).

После этих действий получается та функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которая входит в равенство (61).

В § 82 в формуле (36) нами дан дифференциал этой функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Именно, мы нашли там, что

$$\Delta W = \Delta V = \sum_{i=1}^{i=n} b_i \delta a_i + \sum_{i=1}^{i=n} q_i \Delta x_i - H dz, \tag{33′}$$

что привело нас к формулам (36), дающим производные от W по всем ее аргументам.

Выписывая последние формулы (36) и вспоминая, какое значение в них имеют $b_1, b_2, \ldots, b_n$, видим, что в обозначениях этого параграфа они имеют вид:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \omega_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = \omega_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = \omega_n. \tag{64}$$

Равенства же (64) говорят, что уравнения (62) и (63′) или (63) неотличны.

Примечание. Мы указывали уже в примечании к § 80, что система (6) — часть системы уравнений характеристических линий, выведенной в § 70. Недостающие уравнения получаются, одно — дифференцированием q и применением уравнений (6):

$$dq = -\left\{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial H}{\partial z} dz + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i\right\} = -\frac{\partial H}{\partial z} dz;$$

другое — применением формулы

$$dW \doteq \sum_{i=1}^{i=n} q_i dx_i + q\, dz.$$

Следовательно, в этом параграфе нами снова составлены уравнения § 70, причем путем рассуждений, не зависящих от соображений того параграфа.

87. Интегрирование уравнения первого порядка общего вида. Мы показали в § 80, что интегрирование уравнения

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \tag{1}$$

общего вида может быть сведено к применению первой методы Якоби. При этом там было и указано, как это сделать.

Отыскивая z из уравнения

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0, \tag{2}$$

мы искали W из уравнения

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, -\frac{q_1}{\frac{\partial W}{\partial z}}, -\frac{q_2}{\frac{\partial W}{\partial z}}, \ldots, -\frac{q_n}{\frac{\partial W}{\partial z}}\right) = 0, \tag{3'}$$

положив, что $q_1, q_2, \ldots, q_n$ означают производные от W по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и что

$$p_1 = -\frac{q_1}{\frac{\partial W}{\partial z}},\ p_2 = -\frac{q_2}{\frac{\partial W}{\partial z}},\ \ldots,\ p_n = -\frac{q_n}{\frac{\partial W}{\partial z}}. \tag{65}$$

Предположив, что f неоднородная функция от $p_1, p_2, \ldots, p_n$, мы можем дать уравнению (3′) вид:

$$\frac{\partial W}{\partial z} + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \tag{5}$$

решив относительно $\frac{\partial W}{\partial z}$, и применить методу Якоби, интегрируя систему

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Если

$$W = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) - c$$

полный интеграл уравнения (5), то решение z уравнения (1) можно найти, решая уравнение

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) = c. \tag{66}$$

Последнее уравнение зависит от $n+1$ произвольных постоянных

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, c, \tag{67}$$

тогда как для нахождения полного интеграла уравнения (1) достаточно найти решение, зависящее только от n произвольных постоянных. Но из сказанного в § 85 ясно, что уравнение (66) однородное относительно аргументов (67). Именно, в данном случае функция H однородная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, на что мы указывали в § 80. Следовательно деля, например, на c обе части уравнения (66) или, что то же самое, полагая, что $c = 1$, мы получим полный интеграл уравнения (1) в виде

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) - 1 = 0. \tag{68}$$

Найдя полный интеграл уравнения (1), мы можем составить для него и уравнения характеристических линий. Применяя правило § 69, но заменяя, во избежание недоразумения, буквы $b_2, b_3, \ldots, b_n$

буквами $c_2, c_3, \ldots, c_n$, мы получаем, воспользовавшись примечанием в конце § 69, уравнения:

$$\left.\begin{aligned} V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) - 1 = 0 \\ c_2 \frac{\partial V}{\partial a_1} + \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \\ c_3 \frac{\partial V}{\partial a_1} + \frac{\partial V}{\partial a_3} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n \frac{\partial V}{\partial a_1} + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Уравнения (69) зависят от $2n-1$ произвольных постоянных.

Вследствие однородности функции V относительно $a_1, a_2, \ldots, a_n$, первому уравнению можно дать вид:

$$a_1 \frac{\partial V}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial V}{\partial a_2} + \ldots + a_n \frac{\partial V}{\partial a_n} - 1 = 0,$$

а системе (69) вид:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = g, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -gc_2, \quad \frac{\partial V}{\partial a_3} = -gc_3, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = -gc_n, \qquad (69')$$

положив

$$g = \frac{1}{a_1 - c_2 a_2 - \ldots - c_n a_n}.$$

Из формы (69') ясно, что система (69) разрешима относительно

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;$$

уравнения (69') при $z = z_0$ обращаются, именно, в

$$x_1 = g, \; x_2 = -gc_2, \; x_3 = -gc_3, \; \ldots, \; x_n = -gc_n,$$

как вытекает из сказанного в § 82.

Примечание. Если f однородная функция от $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то уравнение (3') надо решать относительно одного из аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Решая, например, относительно q_1 и дав ему вид

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, q_2, \ldots, q_n) = 0,$$

мы можем применить все сказанное, переставив аргументы x_1 и z вводя в рассмотрение вместо q_1 производную q от W по z.

Уравнения (69) будут разрешимы относительно $z, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

88. Уравнения характеристических линий уравнения (1). В § 70 мы составили дифференциальные уравнения характеристических линий для уравнения (1). В § 86, говоря об уравнении (5), мы снова установили эти уравнения, причем путем рассуждений, не зависящих от соображений § 70. Это дает возможность вывести еще раз уравнения характеристических линий и для уравнения (1) независимо от рассуждений § 70; для этого надо только вернуться обратно от уравнения (5) к уравнению (1) и преобразовать уравнения § 86 так, чтобы в них вошли только элементы уравнения (1).

Приступая к решению этой задачи, положим, что в уравнении (1) функция f неоднородная функция от аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда уравнение (3′) может быть решено относительно $\frac{\partial W}{\partial z}$ и преобразовано в уравнение (5).

Если мы значение $\frac{\partial W}{\partial z}$, найденное из уравнения (3′), т. е. равное $-H$, подставим в (3′), то мы получим тожественно нуль:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{q_1}{H}, \frac{q_2}{H}, \ldots, \frac{q_n}{H}\right) \equiv 0. \tag{70}$$

Обозначим левую часть последнего равенства знаком (f), условившись обозначать этим знаком результат замены в любой функции f аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ при помощи подстановки

$$p_1 = \frac{q_1}{H}, \quad p_2 = \frac{q_2}{H}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{q_n}{H}. \tag{71}$$

Дав таким образом тожеству (70) вид:

$$(f) \equiv 0, \tag{70′}$$

напишем ряд других тожеств, получаемых из (70′) дифференцированием по x_i, z, q_i. Дифференцируя по x_i, получаем

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\left(-\frac{q_k}{H^2}\right)\frac{\partial H}{\partial x_i} \equiv 0,$$

чему можно дать вид, вводя, где можно, аргументы $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) - \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x_i} \equiv 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{72}$$

Таким же образом, составляя производную по z от (f), получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0. \tag{72$_1$}$$

Дифференцируя (f) по q_i, имеем

$$\frac{\partial(f)}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\left(-\frac{q_k}{H^2}\right)\frac{\partial H}{\partial q_i}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\frac{1}{H}\equiv 0$$

или

$$-\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)\frac{\partial H}{\partial q_i}+\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\equiv 0. \tag{73}$$

Положим теперь, что x_i, q_i функции от z, заданные уравнениями

$$\frac{dx_i}{dz}=\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \frac{dq_i}{dz}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{6}$$

Понимая под $p_1, p_2, \ldots, p_n$ функции от z, заданные равенствами (71), из тожеств (73) получаем тожества

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)-\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)\frac{dx_i}{dz}\equiv 0$$

или

$$\frac{dx_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)}\equiv\frac{dz}{\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)}. \tag{74}$$

Переделав одно из равенств (71) в

$$q_i=(p_i)\,H, \tag{71$_1$}$$

получаем

$$dq_i=d(p_i)\,H+(p_i)\left\{\frac{\partial H}{\partial z}\,dz+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial H}{\partial x_i}\,dx_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dq_i\right\}.$$

Вследствие уравнений (6) имеем

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial H}{\partial x_i}\,dx_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dq_i=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\,\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\,\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)dz\equiv 0.$$

Значит

$$\frac{dq_i}{dz}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\equiv H\,\frac{d(p_i)}{dz}+(p_i)\,\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{75}$$

Подставляя в последнее тожество вместо $\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $\frac{\partial H}{\partial z}$ их значения из (72), (72$_1$), находим

$$-\frac{H\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)} \equiv H\frac{d(p_i)}{dz}+\frac{(p_i)H\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)},$$

откуда, сокращая на H и приводя в порядок, получаем

$$-\frac{d(p_i)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+(p_i)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \equiv \frac{dz}{\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)}. \quad (i=1,2,\ldots,n) \quad (74')$$

Итак, справедливы тожества

$$\frac{dx_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)} \equiv -\frac{d(p_i)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+(p_i)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \equiv \frac{dz}{\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)}, \quad (76)$$

к которым надо присоединить и использованное тожество (70). Отсюда ясно, что x_i и p_i как функции от z удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i}{\frac{\partial f}{\partial p_i}} = -\frac{dp_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dz}{\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial p_k}p_k} \\ &f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)=0 \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Уравнения (77) неотличны от выведенных в § 70.

Так как по условию f неоднородная функция от $p_1, p_2, \ldots p_n$,

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial p_k}p_k$$

не равна нулю вследствие уравнения (1), и система (77) допускает решение, в котором x_i и p_i суть функции от z.

Интегрирование уравнений системы (77) вводит, однако, $2n$ произвольных постоянных, тогда как уравнения характеристических линий содержат только $2n-1$. Но последнее уравнение в (77) позволяет одну из постоянных выразить через остальные.

Мы указывали уже, что равенство

$$f=h,$$

где h произвольная постоянная, один из интегралов системы (77). Действительно, пользуясь уравнениями системы, находим

$$df = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$$

$$= \frac{dz}{\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial p_k}p_k}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial z}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial p_k}p_k\right\} \equiv 0.$$

Значит, если

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \varphi_i\,(z,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{2n})\\ p_i &= \psi_i\,(z,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{2n}) \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

собрание общих решений системы (77), то после подстановки в (1) вместо x_i, p_i их значений (78) имеем

$$f\,(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ \ldots, p_n) = \Phi\,(a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{2n}),$$

где правая часть от z не зависит. Отсюда ясно, что для соблюдения последнего уравнения (77) надо, чтобы было

$$\Phi\,(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n}) = 0,$$

откуда можно найти одну из постоянных a_1, a_2, ... a_{2n} через остальные и представить в равенствах (78) x_i, p_i в виде функций z и этих остальных $2n-1$ произвольных постоянных.

Положив

$$\frac{\partial f}{\partial z} = Z,\quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_i,\quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = P_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

мы можем уравнениям характеристических линий дать вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i}{P_i} = -\frac{dp_i}{X_i + p_i Z} = \frac{dz}{\sum_{k=1}^{k=n} P_k p_k}.\\ &f\,(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\ z_1,\ p_1, \ldots,\ p_n) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

89. Случай, когда f однородная функция от производных. В исключенном в прошлом параграфе случае, о котором упоминалось в примечании к § 87, для нахождения характеристических линий мы получаем ту же самую систему (79), что и в общем случае.

В этом случае из уравнения (3′) нельзя найти $\frac{\partial W}{\partial z}$, так как она сокращается. Уравнение (3′) имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \tag{3''}$$

и вместо уравнения (5) надо взять уравнение

$$q_1 + H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, q_2, \ldots, q_n) = 0, \tag{5'}$$

и заменяя систему (6) системой

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dz}{dx_1} = 0, \quad \frac{dq_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dq}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{6'}$$

где q производная $\frac{\partial W}{\partial z}$.

Вместо тожества (70) имеем тожество

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, -H, q_2, \ldots, q_n) \equiv 0,$$

которому можем дать вид

$$(f) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{H}{q}, \quad -\frac{q_2}{q}, \ldots, -\frac{q_n}{q}\right) \equiv 0, \tag{70'}$$

обозначая знаком (f) результат подстановки в f:

$$p_1 = \frac{H}{q} = -\frac{q_1}{q}, \quad p_2 = -\frac{q_2}{q}, \quad \ldots, \quad p_n = -\frac{q_n}{q}. \tag{80}$$

Вместо тожеств (72), (73) и (72_1) имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(f)}{\partial x_i} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{1}{q}\frac{\partial H}{\partial x_i} \equiv 0, \\ \frac{\partial(f)}{\partial q_i} &= -\frac{1}{q}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{1}{q}\frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv 0 \end{aligned}\right\} (i = 2, 3 \ldots, n) \tag{73'}$$

$$\frac{\partial(f)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\frac{1}{q}\frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0. \tag{72'}$$

Положив, что x_i, q_i, $(i = 2, 3, \ldots n)$, z, q функции от x_1, заданные уравнениями (6′), и выражая при помощи (80) через x_1 также и $p_1, p_2, \ldots, p_n$, из второго тожества (73′) находим при помощи (6′) тожества:

$$\frac{dx_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} \equiv \frac{dx_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)}, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{81}$$

Дифференцируя (80), получаем

$$\frac{dq_i}{dx_1} = -q\frac{d(p_i)}{dx_1} - (p_i)\frac{dq}{dx_1}$$

или, вследствие (6′),

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = -q\frac{d(p_i)}{dx_1} + (p_i)\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Последнее тожество на основании (73′) и (72′) дает

$$q\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right):\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) = -q\frac{d(p_i)}{dx_1} - q\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right):\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)$$

или

$$-\frac{d(p_i)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+(p_i)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \equiv \frac{dx_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}. \tag{81′}$$

Соединяя вместе (81) и (81′), заключаем, что справедливы тожества

$$\frac{dx_i}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)} \equiv -\frac{d(p_i)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+(p_i)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}\quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{82}$$

Присоединяя к (82) отношение

$$\frac{dz}{0} = \frac{dz}{\sum\limits_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)(p_k)},$$

убеждаемся, что и в рассматриваемом случае справедливы уравнения (79).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

МЕТОДА КОШИ ИЛИ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ.

90. Восстановление решения по данному многообразию на нем. В главе первой, установив определение семейства характеристических линий уравнения, мы показали, какую связь имеет теория решения задачи Коши с теорией этих линий. Также в главе пятой решение задачи Коши по полному интегралу привело нас к необходимости ввести в рассмотрение понятия характеристических линий уравнения и характеристических линий решения. Устанавливая там эти понятия, мы естественно базировались на теории полного интеграла Лагранжа.

Следует ожидать, что, приступая к изложению методы, приспособленной к непосредственному решению задачи Коши, мы также не обойдемся без рассмотрения характеристических линий, но неизбежно восстановим это понятие.

Положим, дано уравнение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \tag{1}$$

и известно некоторое его решение

$$z = \Phi\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \tag{2}$$

которое образует многообразие измерения n в пространстве $n+1$ измерений. Введем в рассмотрение многообразие измерения $n-1$, принадлежащее многообразию (2):

$$\left.\begin{aligned} z &= \Phi\ (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n) \\ x_n &= \vartheta\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

которое, исключая из первого уравнения x_n при помощи второго, можно задать и уравнениями

$$\left.\begin{aligned} z &= \theta\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}) \\ x_n &= \vartheta\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь

$$\theta\ (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_{n-1}) \equiv \Phi\ (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_{n-1},\ \vartheta).$$

Поставим себе ближайшей задачей выяснение вопроса: можно ли восстановить решение (2), зная уравнение (1) и многообразие (4), принадлежащее этому решению; нахождение решения уравнения (1) по многообразию (4) образует, по сказанному в главах первой и пятой, задачу Коши.

Когда известно решение (2) и дано второе уравнение (3), мы можем вычислить, не прибегая к уравнению (1), на многообразии (4) не только значение функциии z,—функцию θ — но также и значения всех производных от z.

Но когда дано только многообразие (4), вычисление значений производных от z на этом многообразии без посредства уравнения (1) невозможно.

Например, равенство

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_{n-1}\, dx_{n-1} + p_n\, dx_n,$$

дающее все производные первого порядка от z, когда z дана как функция от $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$, обращается в равенство

$$d(z) = (p_1)\, dx_1 + (p_2)\, dx_2 + \ldots + (p_{n-1})\, dx_{n-1} + (p_n)\, d\vartheta,$$

в котором знаком (F) обозначен результат замены в функции $F\ (x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n)$ аргумента x_n через ϑ.

Последнее же равенство дает только соотношения

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = (p_1) + (p_n)\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\theta}{\partial x_{n-1}} = (p_{n-1}) + (p_n)\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{n-1}}. \tag{5}$$

Эти соотношения позволяют выразить функции

$$(p_1),\ (p_2),\ \ldots,\ (p_{n-1}) \tag{6}$$

через функцию (p_n); но функция (p_n) остается неизвестной.

Пользуясь уравнением (1) и заменяя в тожестве

$$(f) \equiv 0, \tag{7}$$

в котором p_n и $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ вычислены по (2), функции (6) их выражениями

$$(p_1) = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - (p_n)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}, \ \ldots, \ (p_{n-1}) = \frac{\partial \theta}{\partial x_{n-1}} - (p_n)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}}, \tag{5'}$$

мы получаем уравнение

$$\underline{(f)} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \vartheta, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - (p_n)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \theta}{\partial x_{n-1}} - (p_n)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}}, (p_n)\right) = 0, \tag{7$_1$}$$

позволяющее, вообще говоря, найти (p_n).

Мы именно можем найти (p_n), если производная от (7_1), по (p_n) не обращается в нуль вследствие уравнения (7_1), т. е., если при наличии (7_1):

$$-\underline{(P_1)}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} - \underline{(P_2)}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} - \ldots - \underline{(P_{n-1})}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}} + \underline{(P_n)} \neq 0, \tag{8}$$

где знак $\underline{(P_i)}$ имеет значение, аналогичное знаку $\underline{(f)}$.

При соблюдении условия (8) можно найти голоморфную функцию (p_n), и, значит, вычислить остальные производные (6); но не трудно убедиться, что при соблюдении условия (8) можно найти значение на (4) всех производных от z.

Для этого достаточно, положив

$$x_n - \vartheta\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \xi,$$

преобразовать уравнение (1) к новым независимым переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi$.

Обозначая производные от z по новым переменным для удобства, временно, через $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n$, а самую неизвестную через $\bar{z}$, мы получаем после преобразования уравнение:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \vartheta + \xi, \bar{z}, q_1 - q_n\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}, \ \ldots, \ q_{n-1} - q_n\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{n-1}}, \ q_n\right) = 0, \tag{1'}$$

из которого, при соблюдении указанного выше условия, можно найти q_n, преобразовав его в уравнение

$$q_n = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ \xi, \bar{z}, \ q_1, \ q_2, \ \ldots, q_{n-1}). \tag{9}$$

Значения при $\xi = 0$ производных $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$, равно как и значение всех других производных от $\bar{z}$, не содержащих дифференцирования по ξ, равны производным от θ по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, так как при $\xi=0$, очевидно, $\bar{z}$ обращается в θ. Уравнение (9) дает сразу (q_n) и, значит, дает возможность найти при $\xi=0$ все производные от z, содержащие только одно дифференцирование по ξ.

Продифференцировав уравнение (9) по ξ и заметив, что это дифференцирование не вводит в правую часть производных, зависящих от двукратного дифференцирования по ξ, мы получим значение при $\xi=0$ второй производной от $\bar{z}$ по ξ и, значит, значения при $\xi=0$ всех производных от $\bar{z}$, содержащих два дифференцирования по ξ.

Продолжая так далее, мы сможем найти значения при $\xi=0$ всех производных от $\bar{z}$ по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi$; возвратившись же к старым переменным, значения всех производных от z по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ при $x_n=\vartheta$, и, значит, восстановить функцию (2).

91. Характеристики и характеристические линии. Положим теперь, что условие (8) не соблюдено и что

$$-\underline{(P_1)}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}-\underline{(P_2)}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}-\ldots-\underline{(P_{n-1})}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{n-1}}+\underline{(P_n)}=0 \qquad (8_1)$$

вследствие уравнения (7_1). Заменив везде p_n его значением, вычисленным по решению (2), мы обратим уравнение (7_1) в тожество (7); вместе с этим и (8_1) обратится в тожество.

Значит, мы только тогда по (4) не сможем восстановить решение (2), если

$$-(P_1)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}-(P_2)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}-\ldots-(P_{n-1})\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{n-1}}+(P_n)\equiv 0,$$

т. е., если ϑ удовлетворяет уравнению

$$P_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial x_n}{\partial x_2}+\ldots+P_{n-1}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}-P_n=0. \qquad (10)$$

По самому выводу уравнения (10), в его коэффициентах z заменено его значением (2), а производные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ вычислены по этому значению z.

Если ϑ решение уравнения (10), то многообразие (3) мы будем называть *характеристикой уравнения* (1), *расположенной на решении* (2).

Рассмотрим сначала случай, когда число независимых переменных равно двум, т. е. когда уравнение (1) имеет вид

$$f(x_1, x_2, z, p_1, p_2)=0. \qquad (1')$$

В этом случае измерение мнообразия (3) равно единице, т. е. характеристика есть линия, расположенная на решении. Уравнение (10) имеет вид:

$$P_1\frac{dx_2}{dx_1}-P_2=0$$

или

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}. \qquad (10_1)$$

Повторяя дословно выкладки § 62, но подразумевая в них под z, p_1, p_2 решение (2) и его производные вместо полного интеграла и его производных, мы получим, как в том параграфе, дифференцируя (1′) по x_1 и x_2, применяя обозначения § 88:

$$X_1+Zp_1+P_1\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial p_2}{\partial x_1}=X_1+Zp_1+$$
$$+\lambda\left\{\frac{\partial p_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial p_1}{\partial x_2}dx_2\right\}=0$$
$$X_2+Zp_2+P_1\frac{\partial p_1}{\partial x_2}+P_2\frac{\partial p_2}{\partial x_2}=X_2+Zp_2+$$
$$+\lambda\left\{\frac{\partial p_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}dx_2\right\}=0,$$

где $\frac{1}{\lambda}$ знаменатель пропорции (10_1).

Отсюда, воспользовавшись равенством

$$dz=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2,$$

заключим, что z, p_1, p_2 на характеристике связаны уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=-\frac{dp_1}{X_1+Zp_1}=-\frac{dp_2}{X_2+Zp_2}=\\&\qquad=\frac{dz}{P_1p_1+P_2p_2}\\&f(x_1,\ x_2,\ z,\ p_1,\ p_2)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Следовательно, характеристика в рассматриваемом случае есть одна из характеристических линий уравнения (1); так как она удовлетворяет уравнению (10_1), то, по сказанному в § 62, она есть характеристическая линия решения (2).

Переходим к общему случаю.

Вспоминая сказанное в § 15, из того, что x_n удовлетворяет уравнению (10), заключаем, что поверхность

$$x_n=\vartheta\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_{n-1}) \qquad (12)$$

в пространстве n измерений есть геометрическое место семейства линий, зависящих от $n-2$ параметров, полученных путем связывания одной зависимостью параметров характеристических линий уравнения (10). Последние зависят от $n-1$ параметров и определены системой

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_{n-1}}{P_{n-1}}=\frac{dx_n}{P_n}. \qquad (10_2)$$

Присоединение к уравнениям каждой такой линии уравнения

$$z = \Phi\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \tag{2}$$

определяет линию в пространстве $n+1$ измерений.

Мы имеем таким образом в пространстве $n+1$ измерений семейство линий, зависящих от $n-2$ параметров, и характеристика (3) есть геометрическое место этих линий.

Когда мы к семейству характеристических линий уравнения (10) присоединяем уравнение (2), то мы получаем в пространстве $n+1$ измерений семейство линий, зависящих от $n-1$ параметров и лежащих на поверхности (2). Поверхность (2) есть геометрическое место этих линий.

Из сказанного в § 70 ясно, что нами получено семейство характеристических линий решения (2). Характеристику, расположенную на решении (2), мы получим, следовательно, связывая параметры семейства характеристических линий решения одной зависимостью. Меняя выбор этой зависимости, получаем различные характеристики решения.

Обратим еще внимание на то, что из первого примера § 76 ясно, что не всякое семейство характеристических линий уравнения приводит к характеристике, как их геометрическому месту; для получения характеристик, как вытекает из сказанного, надо, чтобы линии семейства были характеристическими линиями решения.

Повторяя теперь дословно рассуждения § 70, но подразумевая в них под z, p_1, p_2, $\ldots, p_n$ решение (2) и его производные вместо полного интеграла и его производных, мы получим, как в том параграфе, дифференцируя (1) по x_1, x_2, $\ldots$, x_n и применяя обозначения § 88:

$$X_k + Z p_k + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_k} + P_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_k} + \ldots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_k} = X_k + Z\, p_k + \\ + \lambda \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial p_k}{\partial x_n}\, dx_n \right),$$

где $\frac{1}{\lambda}$ знаменатель пропорции (10$_2$). Отсюда, воспользовавшись равенством

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n,$$

заключаем, что z, p_1, p_2, $\ldots$, p_n на каждой из линий указанного семейства связаны уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i}{P_i} = \ldots = -\frac{dp_i}{X_i + p_i Z} = \ldots = \frac{dz}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k p_k} \\ &f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ p_1,\ \ldots,\ p_n) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

т. е. восстановим результаты § 70, по которым нахождение характеристических линий решения ставится в зависимость от нахождения характеристических линий уравнения.

92. Характеристическая линия, проходящая через интегральный элемент. В § 71 мы условились говорить, что характеристическая линия проходит через интегральный элемент

$$M^{(0)}\,(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_1^{(0)},\ \ldots,\ p_n^{(0)}), \tag{14}$$

если она проходит через точку $m\,(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)})$ и принадлежит к числу характеристических линий решения, содержащего элемент $M^{(0)}$.

Проинтегрировав систему (13), мы находим не только уравнение линии, но и значения аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ вдоль этой линии; причем из самого вывода уравнений (13) ясно, что вдоль характеристической линии решения (2) значения этих аргументов равны значениям производных от функции $\Phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Значит, если постоянные интегрирования определены так, чтобы значения $p_1, p_2, \ldots, p_n$ в некоторой точке на (2) были равны значениям производных от $\Phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в этой точке, то вдоль всей характеристической линии решения (2), проходящей через эту точку, они будут равны производным от функции Φ. Следовательно, про характеристическую линию решения (2) можно сказать, что она проходит через всякий интегральный элемент решения (2), соответствующий точке на ней.

Отсюда вытекает новое правило для решения задачи § 71; чтобы найти характеристическую линию, проходящую через интегральный элемент (14), надо проинтегрировать систему (13) при начальном условии одновременного обращения неизвестных x_1, $x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ в числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, p_n^{(0)}$.

Если мы, чтобы не отдавать предпочтения ни одной из неизвестных, обозначим через dt знаменатель пропорции (13) и выберем, интегрируя систему, за независимое переменное t, то задача сведется к нахождению решений системы

$$\left.\begin{aligned} \ldots\frac{dx_i}{P_i} = \ldots = -\frac{dp_i}{X_i + p_i Z} = \ldots = \frac{dz}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} P_k p_k} = dt \\ f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2 \ldots, p_n) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

при начальных условиях: если $t = 0$, то

$$x_1 = x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_n = x_n^{(0)},\ z = z^{(0)},\ p_1 = p_1^{(0)},\ \ldots,\ p_n = p_n^{(0)}. \tag{15}$$

Задача интегрирования системы при указанных условиях Коши имеет, вообще говоря, как мы указывали в Введении, одно и только одно решение.

Если интегрирование системы приведет к функциям

$$\left.\begin{array}{l} x_i=\varphi_i(t,\ x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_1^{(0)},\ldots,p_n^{(0)}) \\ z\ =\varphi\,(t,\ x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_1^{(0)},\ldots,p_n^{(0)}) \quad (i=1,2,\ldots,n) \\ p_i=\psi_i(t,\ x_1^{(0)},\ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_1^{(0)},\ldots,p_n^{(0)}), \end{array}\right\} \tag{16}$$

то эти функции должны еще удовлетворять условию

$$f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n)=0.$$

Мы указали в § 70, что равенство

$$f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n)=h$$

один из интегралов системы. Следовательно, после подстановки в его левую часть вместо аргументов функций (16), переменное t должно исчезнуть, и должна остаться функция одних начальных значений. Значит, при наличии равенств (16):

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ z,\ p_1,p_2,\ldots,\ p_n)=\psi\,(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}\ldots,x_n^{(0)},z^{(0)},p_1^{(0)},\ldots,p_n^{(0)}).$$

Вид функции ψ нетрудно найти. После замены t нулем, правая часть равенства не изменится, так как она от t не зависит. В левой аргументы $x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ z,\ p_1\ p_2,\ldots,\ p_n$ обратятся соответственно в $x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_1^{(0)},\ldots,\ p_n^{(0)}$, так что мы получим:

$$f\,(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},z^{(0)},p_1^{(0)},\ldots,p_n^{(0)})\equiv\psi\,(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},z^{(0)},p_1^{(0)},\ldots \\ \ldots,\ p_n^{(0)}).$$

Но вследствие того, что $M^{(0)}$ интегральный элемент:

$$f(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},z^{(0)},p_1^{(0)},\ldots,p_n^{(0)})=0$$

и, значит, при наличии равенств (16):

$$f(x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ z,\ p_1,\ldots,\ p_n)\equiv 0.$$

Иначе, если начальные значения определяют интегральный элемент, то нахождение решений системы (13′) сводится к интегрированию системы уравнений ее первой строки и нахождению ее решений Коши; добавочное же условие второй строчки оказывается соблюденным само собою.

Мы условились в § 71 называть интегральный элемент (14) особенным, если через него нельзя провести определенной характеристической линии. В настоящий момент мы можем точнее указать условия, при которых элемент (14) особенный.

Если элемент особенный, то поставленная задача Коши интегрирования системы (13′) не может иметь определенного решения. Последнее же имеет место только тогда, когда один из коэффициентов

$$P_1,\ P_2,\ldots,P_n,\ X_1+p_1Z,\ X_2+p_2Z,\ \ldots,\ X_n+p_n\,Z,\sum_{k=1}^{k=n}P_kp_k \tag{17}$$

перестает быть голоморфным вблизи элемента $M^{(0)}$ или когда все коэффициенты (17) обращаются одновременно в нуль.

Благодаря этому замечанию внимательное изучение уравнения (1) позволяет выделить все особенные интегральные элементы.

Заключения этого параграфа приводят нас к доказательству утверждения, высказанного уже § 71: если два решения уравнения имеют общий, не особенный интегральный элемент, то они имеют общую характеристическую линию, причем касаются вдоль этой линии.

Действительно, характеристические линии двух решений, проходящие через общий их интегральный элемент определены этим элементом, так же как и все интегральные их элементы вдоль характеристических линий; эти же характеристические линии совпадают вследствие единственности решения системы (13) при данных начальных условиях.

93. Особенные решения уравнения. Сказанное в прошлом параграфе позволяет выделить все особенные решения уравнения (1).

Мы видели в § 71, что всякий интегральный элемент особенного решения особенный. Следовательно, для нахождения особенных решений надо найти функции z, обладающие следующими свойствами: если в элементе $M(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ z указанная функция, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ее производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то вблизи каждого M один из коэффициентов (17) перестает быть голоморфным или это M обращает в нуль все функции (17).

Каждая такая функция, если она удовлетворяет уравнению (1), может быть особенным решением.

Предположив, что искомое особенное решение z голоморфно, мы можем ограничиться при его отыскании изучением уравнений

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0, \ldots, P_n = 0. \qquad (17_1)$$

Действительно, так как z удовлетворяет уравнению (1), то продифференцировав его по x_i, находим

$$X_i + Zp_i + \sum_{k=1}^{k=n} P_k \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Отсюда ясно, что если коэффициенты (17_1) голоморфны, то, при сделанном предположении о z, голоморфны и остальные коэффициенты (17); если все коэффициенты (17_1) обращаются в нуль, то, при сделанном предположении о z_1 все остальные коэффициенты (17) обращаются в нуль.

94. Задача Коши. Дано многообразие измерения $n-1$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(0)} = \Phi_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(0)} = \Phi_n(u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ z^{(0)} = \Phi(u_1, \ldots, u_{n-1}). \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Найти решение уравнения (1), заключающее это многообразие.

Чтобы поставленная задача была задачей Коши, надо, чтобы результат исключения параметров $u_1, \ldots, u_{n-1}$ из уравнений (18) приводил бы только к одной зависимости, не содержащей $z^{(0)}$. При таком условии некоторые $n-1$ из первых n уравнений (18) должны быть разрешимы относительно $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Из этого вытекает, что, не нарушая общности, можно, ставя задачу Коши, предполагать, что данное многообразие дано уравнениями:

$$x_n^{(0)} = \vartheta(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}), \quad z^{(0)} = \theta(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}), \tag{4'}$$

если знаком $x_n^{(0)}$ обозначен подобающим образом выбранный аргумент. От вида (4′) легко переходим к виду (18), положив

$$x_1^{(0)} = u_1, \; x_2^{(0)} = u_2, \ldots, \; x_{n-1}^{(0)} = u_{n-1}.$$

Если задача имеет решение, то, предполагая, например, что это решение дано уравнением (2), мы можем в соответствие каждой точке многообразия (18) привести интегральный элемент, составив таким образом интеграл $M^{(n-1)}$, основание которого (18).

Через каждый элемент этого интеграла мы можем провести характеристическую линию решения; решение (2) будет геометрическим местом указанных характеристических линий.

Этот обзор наводит на следующее правило для составления решения. Сначала составляем по основанию (18) интеграл $M^{(n-1)}$, что, вообще говоря, выполнимо. Для этого определяем функции $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ так, чтобы были соблюдены условия:

$$\left.\begin{aligned} &f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n, \; z^{(0)}, \; p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) = 0 \\ &dz^{(0)} = p_1^{(0)} dx_1^{(0)} + \ldots + p_n^{(0)} dx_n^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Элементы найденного таким образом интеграла

$$M^{(n-1)}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \; z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \tag{20}$$

зависят от $n-1$ параметров.

Затем через каждый элемент интеграла $M^{(n-1)}$ проводим характеристическую линию решения, что, вообще говоря, выполнимо.

Имея в своем распоряжении собрание (16) решений Коши системы (13′), мы достигаем этого простой заменой в уравнениях (16) аргументов $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ их значениями, данными интегралом (20).

Выполнив эту замену, мы преобразуем (16) в уравнения

$$\left.\begin{aligned} &x_i = \chi_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \\ &z = \chi(t, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \; (i = 1, 2, \ldots, n); \\ &p_i = \omega_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{16_1}$$

первые $n+1$ уравнений собрания (16_1) дадут искомое семейство характеристических линий решения.

Для составления решения останется исключить из уравнений найденного семейства характеристических линий параметры u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$ и искусственно введенное переменное t. Для выполнения этого исключения надо из первых n уравнения (16_1) найти t и параметры $u_1, \ldots, u_{n-1}$ и подставить их в следующее уравнение (16_1):

$$z=\chi\,(t,\ u_1,\ u_2, \ldots, u_{n-1}\,).$$

При применении этого процесса могут возникнуть следующие препятствия доведению его до конца:

a) может случиться, что по данному основанию мы не сможем составить интеграл $M^{(n-1)}$, получая иногда интеграл $M^{(n)}$, иногда же не получая голоморфных значений для искомых функций. Если обстоятельство (a) не обнаруживается, то

b) может случиться, что каждый интегральный элемент интеграла $M^{(n-1)}$особенный.

Наконец, если препятствия (a), (b) не обнаруживаются, то

c) может случиться, что из первых n уравнений (16_1) нельзя найти $t,\ u_1,\ u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Мы посвятим разбору случаев (a), (b) и (c) особый параграф; теперь же докажем, что если указанные случаи не обнаруживаются, то описанный процесс действительно приводит к нахождению требуемого решения. В этом мы можем убедиться при помощи следующих соображений. Найдя из первых n уравнений (16_1) t, u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$ и подставив их в остальные уравнения, мы представим $z,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_n$ в виде функций от $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$. Эти функции, как выяснено, удовлетворяют уравнению

$$f(x_1, \ldots,\ x_n,\ z,\ p_1, \ldots,\ p_n)=0.$$

Чтобы убедиться, что z действительно решение уравнения (1), остается проверить, что найденные для $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$ функции равны производным по $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ от найденной функции z, т. е. что найденные функции связаны зависимостью

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n. \tag{21}$$

95. Установление действительности процесса § 94. Мы установим справедливость равенства (21), поставив себя в более общие условия. Обобщая данные ранее определения, условимся говорить, что собрание функций от некоторых параметров:

$$(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^0,\ z^{(0)},\ p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \tag{22}$$

образует интеграл M уравнения (1), если соблюдены условия:

$$f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)})\equiv 0$$

$$dz^{(0)}=p_1^{(0)}\,dx_1^{(0)}+\ldots+p_n^{(0)}\,dx_n^{(0)}$$

и докажем следующее утверждение:

Если собрание чисел (22) образует интеграл M и если собрание чисел

$$(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) \tag{22$_1$}$$

получено из (16) заменой аргументов $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ *их значениями (22), то собрание (22$_1$) тоже образует интеграл, т. е.*

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) \equiv 0$$
$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n.$$

При этом мы предполагаем, что можно в формулах (16) заменять аргументы $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ их значениями (22); это условие аналогично предположению, что случай (b) не имеет места.

Первое из доказываемых равенств соблюдено по доказанному ранее; нам надо только доказать второе, которое аналогично равенству (21). Условимся, как в § 82, обозначать знаком d дифференциалы от переменных x_i, z, p_i рассматриваемых как функции одного t: в этом смысле взяты дифференциалы в уравнениях (13'); знаком δ мы будем обозначать дифференциалы рассматриваемых переменных, как функций от параметров $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, и знаком Δ дифференциалы их как функций от t и параметров. При таком выборе обозначений мы имеем

$$\Delta = d + \delta.$$

При выбранных обозначениях задание, что собрание

$$(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \tag{22}$$

образует некоторый интеграл, записывается равенством:

$$\delta z^{(0)} = p_1^{(0)} \delta x_1^{(0)} + \ldots + p_n^{(0)} \delta x_n^{(0)}.$$

Мы установим справедливость равенства

$$\Delta z = p_1 \Delta x_1 + p_2 \Delta x_2 + \ldots + p_n \Delta x_n, \tag{21$_1$}$$

которое при обозначениях прошлого параграфа не отлично от (21), а при обозначениях этого параграфа от доказываемого.

Если в результате исключения t и параметров из уравнений (16) получается z как функция от несвязанных зависимостями аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, из равенства (23$_1$) можно заключить, что

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Подобное обстоятельство обнаруживается, когда не имеют места случаи (a), (b) и (c).

Равенству (21$_1$) можно дать вид:

$$dz + \delta z = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n + p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + \\ + \ldots + p_n \delta x_n. \tag{21}$$

Преобразуя первые n отношений (13′) и приравнивая их к последнему, из (13′) имеем

$$\frac{-p_1dx_1}{-P_1p_1}=\ldots=\frac{-p_ndx_n}{-P_np_n}=\frac{dz}{\sum\limits_{k=1}^{k=n}P_kp_k}=$$

$$=\frac{dz-p_1dx_1-\ldots-p_ndx_n}{\sum\limits_{k=1}^{k=n}P_kp_k-P_1p_1-\ldots-P_np_n}=\frac{dz-p_1dx_1-\ldots-p_ndx_n}{0}.$$

Из последнего равенства заключаем, что

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n \tag{23}$$

и что для справедливости (21′) остается удовлетворить равенству

$$\delta z=p_1\,\delta x_1+p_2\,\delta x_2+\ldots+p_n\,\delta x_n. \tag{24}$$

Положим

$$U=\delta z-p_1\,\delta x_1-p_2\,\delta x_2-\ldots-p_n\,\delta x_n. \tag{25}$$

Дифференцируя последнее равенство по t и пользуясь тем, что знаки d и δ можно переставлять, имеем

$$dU=\delta\,dz-p_1\,\delta\,dx_1-p_2\,\delta\,dx_2-\ldots-p_n\,\delta\,dx_n-dp_1\,\delta\,x_1-$$
$$-dp_2\,\delta\,x_2-\ldots-dp_n\,\delta\,x_n. \tag{26}$$

Продифференцируем теперь по параметрам тожество (23):

$$\delta\,dz=p_1\,\delta\,dx_1+p_2\,\delta\,dx_2+\ldots+p_n\,\delta\,dx_n+\delta\,p_1\,dx_1+\delta\,p_2dx_2+$$
$$+\ldots+\delta\,p_ndx_n. \tag{26′}$$

Складывая равенства (26) и (26′), получаем

$$dU=\sum_{i=1}^{i=n}\delta p_i\,dx_i-\sum_{i=1}^{i=n}dp_i\,\delta x_i. \tag{27}$$

Из уравнений (13′) мы однако имеем:

$$dx_i=P_i\,dt,\quad dp_i=-(X_i+p_iZ)dt.$$

Подставляя эти значения в (27), заключаем, что

$$dU=\left[\sum_{i=1}^{i=n}P_i\,\delta\,p_i+\sum_{i=1}^{i=n}X_i\,\delta\,x_i+Z\sum_{i=1}^{i=n}p_i\,\delta\,x_i\right]dt. \tag{27′}$$

Но функции $x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n$ удовлетворяют второму условию (13′):

$$f(x_1,\ldots,\;x_n,\;z,\;p_1,\ldots,\;p_n)\equiv 0.$$

Дифференцируя это тожество по параметрам, заключаем

$$\sum_{i=1}^{i=n}X_i\,\delta x_i+\sum_{i=1}^{i=n}P_i\,\delta p_i+Z\,\delta z\equiv 0. \tag{28}$$

Вычитая левую часть тожества (28) из правой (27′), получаем окончательно

$$dU = Z\left[\sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta x_i - \delta z\right] dt = -ZU\,dt. \tag{29}$$

Из последнего равенства заключаем, что

$$U = U_0 e^{-\int_0^t Z dt} \tag{30}$$

где U_0 значение U при $t=0$.

Но так как при $t=0$:

$$x_i = x_i^{(0)}, \quad z = z^{(0)}, \quad p_i = p_i^{(0)},$$

мы имеем на основании сделанных предположений о собрании (22):

$$U_0 = \delta z^{(0)} - p_1^{(0)} \delta x_1^{(0)} - p_1^{(0)} \delta x_2^{(0)} - \ldots - p_n^{(0)} \delta x_n^{(0)} = 0. \tag{31}$$

Равенство (33), следовательно, дает

$$U = \delta z - p_1 \delta x_1 - p_2 \delta x_2 - \ldots - p_n \delta x_n$$

а отсюда вытекает и что (21_1) справедливо, что и требовалось доказать.

96. Обозрение исключенных случаев. Предположение (а) было подробно рассмотрено в § 72.

Там мы выяснили, отметив, что второе из условий (19) равносильно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} &= p_1^{(0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} + \ldots + p_n^{(0)} \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}} &= p_1^{(0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_{n-1}} + \ldots + p_n^{(0)} \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_{n-1}} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

что все $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ можно найти, если определитель

$$\begin{vmatrix} (P_1), \ldots, (P_n) \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial u_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_{n-1}}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{33}$$

не обращается в нуль вследствие первого уравнения (19); здесь знаком (P_i) нами обозначен результат замены в $\dfrac{\partial f}{\partial p_i}$ аргументов $x_1, \ldots, x_n, z$, элементами данного основания.

Оставляя в стороне случай, когда из уравнений (19) нельзя найти голоморфных значений для $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$, названный исключительным, мы назвали характеристическим случай, когда одно из $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ оставалось произвольным или когда найденные голоморфные значения $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ обращали в нуль определитель (33).

Мы предположим, что из первых уравнений (18) нельзя исключить параметры $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$; это требует, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial\Phi_{n-1}}{\partial u_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial u_{n-1}}, \ldots, \dfrac{\partial\Phi_{n-1}}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Пользуясь этим, из уравнений (32) можно найти $p_1^{(0)}, \ldots, p_{n-1}^{(0)}$ и исключив их из первого уравнения (19):

$$f(x_1^{(0)}, x_2, \ldots x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) = 0$$

оставить уравнение для $p_n^{(0)}$. Если нельзя найти из полученного уравнения ни голоморфного, ни не голоморфного значения для $p_n^{(0)}$, $p_n^{(0)}$ должно из этого уравнения исчезать, а в этом случае определитель (33) должен обращаться в нуль тожественно.

Если многообразие (18) дано в виде (4') и, значит, уравнения (32) имеют вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1^{(0)}} = p_1^{(0)} + p_n^{(0)}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1^{(0)}}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_{n-1}^{(0)}} = p_{n-1}^{(0)} + p_n^{(0)}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{n-1}^{(0)}}, \qquad (32')$$

определитель (33), как мы указали в § 72, обращается в

$$(P_n) - (P_1)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1^{(0)}} - \ldots - (P_{n-1})\frac{\partial\vartheta}{\partial x_{n=1}^{(0)}}. \qquad (8')$$

Следовательно, в случае (а) он тожественно равен нулю; названный характеристическим случай, когда можно найти $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ и когда найденные их значения обращают в нуль (33), под случай (а) не подходит.

Полученный результат оправдывает данное случаю (а) название характеристического.

В рассматриваемом случае голоморфное решение у уравнения (1) может существовать только тогда, когда функция θ удовлетворяет добавочным условиям. Действительно, если по исключении при помощи (32') из первого уравнения (19) $p_1^{(0)}, \ldots, p_{n-1}^{(0)}$ исключается и $p_n^{(0)}$, то остается уравнение, связывающее функцию θ.

Если θ полученному уравнению не удовлетворяет, то не существует решения, в котором на (4) $\rho_n^{(0)}$ ограничено, если вообще существует решение. Последний случай следует отнести к названному нами исключительным. В нем мы не можем составить какого либо интеграла считая $p_n^{(0)}$ ограниченным.

Исключив его, нам остается от случая (a), только случай появления интеграла $M^{(n)}$.

Составив этот интеграл, можно элементы его подставлять в формулы (16) и, если не обнаружится случай (b), образовать интеграл (22_1). Так как выше n измерение интеграла быть не может, мы получим интеграл $M_1^{(n)}$; уже при $t=0$, именно, его элементы зависят от n параметров. Если предположить, что основание этого интеграла $M_1^{(n)}$ имеет измерение равное n, то, так как измерение z не может быть выше измерения собрания функций $x_1, \ldots, x_n$, это последнее собрание само измерения n и должно допускать решение относительно параметров. Исключение этих параметров из выражения z должно привести к нахождению z как функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Предположение, что эта функция голоморфна на многообразии (4′), невозможно, так как на многообразии (4′), т. е. при $t=0$, не все ее производные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ имеют определенное значение.

Следовательно, если откидывать исключительные случаи, то основание интеграла $M_1^{(n)}$ должно быть измерения $n-1$.

Случай (b) появляется, когда каждый элемент интеграла $M^{(n-1)}$ особенный. С этим обстоятельством мы имеем дело, если многообразие (16) принадлежит особенному решению. Такое решение задачи мы можем найти, применяя сказанное в § 93. Предположение, что уравнения (16) перестают быть голоморфными вблизи элементов $M^{(n-1)}$ равносильно предположению, что вблизи этих элементов имеет место одно из обстоятельств, указанных в § 93 и сопровождающих появление особенного интегрального элемента. Значит случай (b) будет покрыт, когда будут исследованы все особенные решения.

Переходим к случаю (c), в котором из первых n уравнений (16_1) нельзя найти $t, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$; если их нельзя найти, то их можно исключить и найти зависимость между $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Этот случай распадается на два подслучая: на подслучай (A), в котором измерение собрания функций

$$(x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1, \ldots, p_n) \tag{34}$$

равно n, и на подслучай (B), в котором измерение этого собрания ниже n.

Во всяком случае собрание чисел (34) удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, z, p_1, \ldots, p_n) &= 0 \\ dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n & \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

т. е. образует некоторый интеграл M.

В подслучае (A) собрание образует интеграл $M^{(n)}$, не давая решения уравнения (1).

В подслучае (B) мы имеем дело с некоторым интегралом $M^{(n-1)}$. Действительно, измерение собрания (34) не может быть ниже $n-1$, будучи равно $n-1$ при $t=0$.

Если мы имеем дело со случаем (c), то в обоих подслучаях якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}}, \frac{\partial x_2}{\partial u_{n-1}}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{36}$$

должен обращаться тожественно в нуль: иначе вблизи некоторой точки $(t^{(0)}, u_1^{(0)}, \ldots, u_{n-1}^{(0)})$ можно было бы определить из первых n уравнений (16_1) $t, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Следовательно, (36) равно нулю и при $t=0$. Так как производные $\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ соответственно равны $P_1, \ldots, P_n$, то при $t=0$ якобиан (36) обращается в значение (33) на интеграле $M^{(n-1)}$; также, если мы имеем дело с заданием

$$x_n^{(0)} = \vartheta(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}), \quad z^{(0)} = \theta(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}), \tag{4'}$$

то (8′) обращается в нуль на интеграле $M^{(n-1)}$.

Итак, в случае (c) мы имеем дело с характеристическим случаем.

97. Характеристический случай. Мы покажем, что в характеристическом случае задача Коши имеет бесчисленное множество решений.

В случае (c) основание полученного интеграла $M^{(n-1)}$ или интеграла $M^{(n)}$ дается первыми уравнениями (16_1):

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \chi_i(t, u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ z &= \chi(t, u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

измерение его $n-1$; в подслучае (A) и в подслучае, оставшемся от случая (a), оно может кажущимся образом зависеть еще от одного параметра, оставаясь тем не менее измерения $n-1$.

Это основание во всех случаях есть геометрическое место характеристических линий.

При $t=0$ уравнения (37) во всех случаях обращаются в

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \Phi_i(u_1, \ldots, u_{n-1}), (i=1, 2, \ldots, n) \\ z &= \Phi(u_1, \ldots, u_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{18'}$$

По условию, из первых $n-1$ уравнений (18′) можно найти параметры $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ и преобразовать уравнения (18′) в уравнения

$$x_n = \vartheta(x_1, \ldots, x_{n-1}), \; z = \theta(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{4*}$$

Значит, из первых $n-1$ уравнений (37) также можно найти эти параметры и заменить их через параметры $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$; если это нахождение выполнимо при частном значении t, то оно должно быть выполнимым и при произвольном значении t.

Итак, многообразию (37) можно дать вид:

$$x_n = \vartheta_1(x_1, \dots, x_{n-1}),\ z = \vartheta_1(x_1, \dots, x_{n-1}); \tag{38}$$

при исключении из x_n и z параметров $u_1, \dots, u_{n-1}$, остальные параметры также должны исчезнуть, иначе измерение (38) было бы более $n-1$.

Но всякая точка многообразия (4^*) должна принадлежать многообразию (38), так как через каждый элемент, связанный с ($18'$), нами проводилась характеристическая линия и (38) есть геометрическое место этих линий. Отсюда вытекает, что многообразия (4^*) и (38) совпадают. Так как (38) есть геометрическое место характерических линий, (4^*) также геометрическое место характеристических линий.

Примем во внимание первые $n-1$ зависимости (37):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \chi_1(t,\ u_1, \dots, u_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \chi_{n-1}(t,\ u_1, \dots, u_{n-1}). \end{array}\right\} \tag{37'}$$

Из них можно найти t и некоторые $n-2$ из остальных параметров. Действительно, на составленном интеграле один из коэффициентов $P_1, \dots, P_{n-1}$ не нуль. Если бы все они были нули, то коэффициент P_n был бы отличен от нуля, так как мы не находимся в случае (b). Если $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ не зависят от t, то P_1, $P_2, \dots, P_{n-1}$ равны нулю, но P_n отлично от нуля и x_n зависит от t; тогда при исключении из уравнения (37), дающего x_n, параметров $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ переменное t не может исчезнуть, а это противоречит сделанным предположениям.

Если P_1 не обращается в нуль на составленном интеграле, то из первого уравнения ($37'$) можно найти t. Подставив найденное значение t в остальные уравнения ($37'$), мы получим $n-2$ уравнения, из которых можно найти $n-2$ параметров; если бы их нельзя было найти, то можно было бы обнаружить зависимость между x_1, $x_2, \dots, x_{n-1}$.

Положим, следовательно, что исключение параметров из x_n выполнено нахождением t и некоторых других параметров, причем один из параметров u , $u_2, \dots, u_{n-1}$, скажем параметр u_{n-1}, находить не пришлось.

Вследствие этого уравнения (38), (4^*) тоже, можно составить следующим образом: заменить u_{n-1} постоянным числом $\overset{(0)}{u}_{n-1}$, выбранными произвольно, но так, чтобы указанная возможность решения системы ($37'$) относительно параметров не нарушалась. Найти эти аргументы из системы ($37'$) и исключить их из последних двух уравнений (37).

Следовательно, (4*) есть геометрическое место характеристических линий

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \chi_i\,(t, u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}^{(0)}), (i = 1, 2, \ldots, n) \\ z &= \chi\,(t, u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}^{(0)}). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

При $t = 0$ из (39) получаем

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(0)} &= \Phi_i(u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}^{(0)}) \\ z^{(0)} &= \Phi\,(u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}^{(0)}). \end{aligned}\right\} \tag{39'}$$

Сказанное приводит к заключению: многообразие (4*) есть геометрическое место характеристических линий, проходящих через элементы интеграла

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}), \tag{40}$$

получаемого из интеграла, соответствующего основанию (4*), заменою u_{n-1} через $u_{n-1}^{(0)}$.

Составим многообразие измерения $n-1$:

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(1)} &= \Omega_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1})\ i = 1, 2, \ldots, n \\ z^{(1)} &= \Omega(u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

выбирая функции $\Omega_1, \ldots, \Omega_n, \Omega$ произвольно, но так, чтобы они удовлетворяли трем условиям.

1) Положим, что соблюдены равенства

$$\Omega_i(u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}^{(0)}) = \Phi_i(u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}^{(0)}).$$

2) Положим, что интеграл $M_1^{(n-1)}$

$$(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, z^{(1)}, p_1^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)}),$$

построенный по основанию (41), не характеристический.

3) Положим, что при $u_{n-1} = u_{n-1}^{(0)}$ элементы этого интеграла обращаются соответственно в элементы интеграла (40).

Подобный выбор функций (41) возможен. Чтобы удовлетворить первому условию достаточно положить

$$\Omega_i(u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}) = \Phi_i(u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}^{(0)}) + (u_{n-1} - u_{n-1}^{(0)})A_i,$$

где A_i функции аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}$.

Чтобы было соблюдено второе условие, надо только, чтобы уравнение

$$\begin{vmatrix} (P_1), \ldots, (P_n) \\ \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial\Omega_n}{\partial u_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial u_{n-1}}, \ldots, \dfrac{\partial\Omega_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0,$$

не было бы следствием уравнений

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1^{(1)}, x_2 \ldots, x_n^{(1)}, z^{(1)}, p_1^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)}) = 0 \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_i} = p_1^{(1)} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial u_i} + \ldots + p_n^{(1)} \dfrac{\partial \Omega_n}{\partial u_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{array}\right\} \quad (42)$$

что возможно, так как выбор $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ничем не ограничен.

Наконец, можно удовлетворить и последнему условию. При $u_{n-1} = u_{n-1}^{(0)}$ первые $n-2$ уравнений (42) во второй строке обращаются в уравнения, связывающие элементы (40); последнее же уравнение обращается в

$$\overline{A} = p_1^{(1)} \overline{A_1} + \ldots + p_n^{(1)} \overline{A_n}$$

и связывает только значения функций $\overline{A_i}$, равных значениям функций A_i при $u_{n-1} = u_{n-1}^{(0)}$; их можно подобрать так, чтобы уравнение удовлетворялось. Первое уравнение (42) в силу первого условия не отлично от уравнения, связывающего элементы (40).

Пользуясь многообразием (41), мы можем решить задачу Коши и получить интегральную поверхность.

Интегральные элементы, определенные числами (40), будут принадлежать этой интегральной поверхности. Следовательно, характеристические линии (39'), как проходящие через эти интегральные элементы, будут также принадлежать этой интегральной поверхности и, значит, найденная интегральная поверхность будет заключать их геометрическое место, т. е. многообразие (4*).

Из доказанного, между прочим, вытекает, что имеется бесчисленное множество решений, имеющих с данным общей его характеристику.

98. Задачи, отличные от задачи Коши. Если ищется общее решение уравнения, то процессом, описанным в § 94, не ограничиваются все возможные случаи.

Можно не считать, что $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}$ функциями от $n-1$ параметров, но счесть их функциями меньшего числа подобно тому, как мы делали в § 77. Действительно, положим

$$\begin{aligned} x_i^{(0)} &= \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}), \; (i = 1, 2, \ldots, n, k < n) \\ z^{(0)} &= \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}). \end{aligned}$$

Второе условие (19) даст систему из $k-1$ уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = p_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} + \ldots + p_n^{(0)} \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_{k-1}} = p_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{k-1}} + \ldots + p_n^{(0)} \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{k-1}}. \end{gathered}$$

Присоединив к этим уравнениям первое уравнение (19), мы выразим k из аргументов $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ через остальные $n-k$, которые останутся произвольными. Формулы (16_1) будут попрежнему зависеть от n параметров: t, $k-1$ параметров, обозначенных буквами $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ и $n-k$ из аргументов $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$.

Если исключение этих параметров даст z как функцию от $x_1, \ldots, x_n$, то найденное z будет решением уравнения (1) на основании сказанного в § 95.

С этим случаем мы будем, например, иметь дело, если мы будем считать $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}$ постоянными. Второе уравнение (19) соблюдено тогда при всяких $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$; первое уравнение (19) определяет один из них через остальные $n-1$, которые и остаются произвольными. Мы получим конус характеристических линий, проходящий через данную точку $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)})$, о котором мы уже говорили в § 77.

99. Примеры. 1) Найти то решение уравнения

$$p_1 p_2 - 4z = 0, \tag{43}$$

в котором

$$\text{при } x_1 = 0\colon\ z = x_2. \tag{44}$$

Уравнения, определяющие характеристические линии:

$$\frac{dx_1}{p_2} = \frac{dx_2}{p_1} = -\frac{dp_1}{-4p_1} = -\frac{dp_2}{-4p_2} = \frac{dz}{2p_1 p_2} = dt, \tag{45}$$

причем последнее отношение может быть заменено отношением $\frac{dz}{8z}$. Интегрируя систему (45), легко находим

$$p_1 = p_1^{(0)} e^{4t},\ p_2 = p_2^{(0)} e^{4t},\ z = z_0 e^{8t},\ x_1 = \frac{1}{4} p_2^{(0)} e^{4t} + x_1^{(0)} - \frac{1}{4} p_2^{(0)},$$

$$x_2 = \frac{1}{4} p_1^{(0)} e^{4t} + x_2^{(0)} - \frac{1}{4} p_1^{(0)}. \tag{46}$$

Положив

$$x_1^{(0)} = 0,\quad x_2^{(0)} = u,\ z_0 = u, \tag{47}$$

имеем

$$1 = p_2^{(0)},\qquad p_1^{(0)} - 4z_0 = 0,$$

т. е.

$$p_2^{(0)} = 1,\quad p_1^{(0)} = 4u. \tag{47'}$$

Подставляя найденные значения в последние три уравнения (46), получаем

$$x_1 = \frac{1}{4} e^{4t} - \frac{1}{4},\quad x_2 = ue^{4t} + u - u = ue^{4t},\quad z = ue^{8t};$$

исключение u и t дает решение

$$z = x_2 (4x_1 + 1).$$

2) Найти то решение уравнения (43), в котором при

$$x_1 = x_2 - \frac{1}{4}; \quad z = 4x_2^2. \tag{48}$$

Положив

$$x_1^{(0)} = u - \frac{1}{4}, \quad x_2^{(0)} = u, \quad z_0 = 4u^2,$$

имеем

$$8u = p_1^{(0)} + p_2^{(0)}.$$

Присоединив к этому уравнению уравнение

$$p_1^{(0)} p_2^{(0)} = 16u^2,$$

находим

$$p_1^{(0)} = 4u, \quad p_2^{(0)} = 4u.$$

Подстановка в последние три уравнения (46) найденных значений дает

$$z = 4u^2 e^{8t}, \quad x_1 = u\,e^{4t} + u - \frac{1}{4} - u = u\,e^{4t} - \frac{1}{4},$$

$$x_2 = u\,e^{4t} + u - u = u\,e^{4t}.$$

При исключении u пропадает и t, и мы получаем

$$z = 4x_2^2, \quad x_1 = x_2 - \frac{1}{4},$$

т. е. восстанавливаем данное основание.

В рассматриваемом случае, как видно из последних выкладок, основание (48) есть геометрическое место характеристических линий, расположенных на некотором решении.

3) Найти для уравнения (43) конус характеристических линий, проходящих через точку $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, z_0)$.

Положив

$$p_1^{(0)} = \frac{4z_0}{p_2^{(0)}} = \frac{4z_0}{u},$$

из (46) получаем

$$z = z_0 e^{8t}, \quad x_1 = \frac{1}{4} u\,e^{4t} + x_1^{(0)} - \frac{1}{4} u, \quad x_2 = \frac{z_0}{u} e^{4t} + x_2^{(0)} - \frac{z_0}{u},$$

что дает

$$z = z_0 \left(1 + 2\sqrt{\frac{(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^{(0)})}{z_0}}\right)^2.$$

4) Найти то решение уравнения

$$x_1 p_1 - x_2 p_2 = 0, \tag{49}$$

в котором при

$$x_2 = \frac{h}{x_1}: \quad z = 0.$$

Положив

$$x_1^{(0)} = u, \quad x_2^{(0)} = \frac{h}{u}, \quad z_0 = 0, \tag{50}$$

имеем

$$0 = p_1^{(0)} - \frac{h}{u^2}\, p_2^{(0)}. \tag{51}$$

Первое условие (19) дает

$$u\, p_1^{(0)} - \frac{h}{u}\, p_2^{(0)} = 0. \tag{51'}$$

Уравнение (51) и (51′) не различны. Им можно удовлетворить, положив

$$p_2^{(0)} = v, \quad p_1^{(0)} = \frac{h}{u^2}\, v. \tag{52}$$

Характеристические линии уравнения (49) определяются системой

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-x_2} = -\frac{dp_1}{p_1} = -\frac{dp_2}{-p_2} = \frac{dz}{0} = dt,$$

интегрируя которую, получаем

$$x_1 = x_1^{(0)}\, e^t, \quad x_2 = x_2^{(0)}\, e^{-t}, \quad z = z_0, \quad p_1 = p_1^{(0)}\, e^{-t}, \quad p_2 = p_2^{(0)}\, e^t.$$

Подставляя значения (50) и (52), получаем

$$x_1 = u\, e^t, \quad x_2 = \frac{h}{u}\, e^{-t}, \quad z = 0, \quad p_1 = \frac{h}{u^2}\, v\, e^{-t}, \quad p_2 = v\, e^t;$$

положив в последних уравнениях

$$u\, e^t = \xi, \quad v\, e^t = \eta,$$

находим

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \frac{h}{\xi}, \quad z = 0, \quad p_1 = \frac{h\eta}{\xi^2}, \quad p_2 = \eta.$$

Мы получаем только интеграл $M^{(2)}$.

Самое общее решение уравнения (49), удовлетворяющее поставленным условиям

$$z = (x_1 x_2 - h)\, \varphi(x_1 x_2).$$

Данное основание — характеристическая линия.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

100. Замечания алгебраического характера о системах. Положим, дана система

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

из m уравнений.

Ранее чем приступать к интегрированию системы (1), надо подвергнуть ее алгебраическому изучению, аналогичному тому, которому была подвергнута в § 40 система из m линейных уравнений.

При исследовании системы может обнаружиться один из следующих случаев:

I) может случиться, что система допускает решение относительно m из аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, т. е. что уравнения (1) алгебраически независимы относительно этих аргументов или

II) что аргументы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ можно исключить из уравнений (1). В этом последнем случае может обнаружиться одно из следующих обстоятельств.

1) исключение аргументов $p_1, \ldots, p_n$ приводит к тожествам; в этом случае часть уравнений (1) алгебраическое следствие остальных и могут быть отброшены; система (1) может быть заменена другой, с меньшим числом уравнений.

2) исключение аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ дает одну или несколько зависимостей, связывающих аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0. \qquad (2)$$

В этом последнем случае опять могут обнаружиться две возможности:

a) среди зависимостей (2) есть одна, не заключающая z:

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \qquad (2')$$

в этом случае система уравнений (1) не имеет решения: независимые переменные, именно, не могут быть связываемы зависимостями.

b) все зависимости (2) содержат z. Тогда из одной из них можно это z найти без каких-либо интегрирований. Может случиться, что найденное z удовлетворяет всем уравнениям системы (1), тогда оказывается найденным ее решение без каких-либо интегрирований. Но может случиться, что это z одному из уравнений системы (1) не удовлетворяет; тогда система не имеет решений.

В дальнейшем мы будем предполагать, что система подходит под случай (I). Если бы она под этот случай не подходила, ее можно было бы заменить другой, с меньшим числом уравнений, подходящей под случай (I), или убедиться, что она не имеет решений, или найти ее решение без интегрирования.

101. Теорема о замкнутых системах. *Если некоторая функция z удовлетворяет уравнениям*

$$\left.\begin{aligned} f(x_1, x_2 \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \\ F(x_1, x_2 \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

то она удовлетворяет и уравнению

$$[F, f] = 0, \tag{4}$$

где

$$[F, f] = \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{df}{dx_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{dF}{dx_k}\right). \tag{5}$$

Подставляя вместо z его значение в (3), мы обратим равенства (3) в тожества. Обозначая через (f) и (F) результат замены z его значением в f и F, имеем, следовательно,

$$(f) \equiv 0, \quad (F) \equiv 0. \tag{3'}$$

Дифференцируя последние тожества по x_i, получаем новые тожества

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial (f)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)p_i + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \left(\frac{df}{dx_i}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \frac{\partial (F)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)p_i + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \left(\frac{dF}{dx_i}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_i} \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Умножая первое из тожеств (6) на $\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)$, второе на $\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$, вычитая из первого произведения второе, давая в разности i значения $1, 2, \ldots, n$ и складывая эти разности, получаем

$$([F, f]) + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_i} \equiv 0. \tag{7}$$

Но, переставляя значки i и k, имеем:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_i}{\partial x_k}.$$

Вследствие этого тожество (7) имеет вид

$$([F, f])+\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}-\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right)\equiv 0$$

и так как

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x_k}$$

дает

$$([F, f])\equiv 0, \tag{4}$$

т. е. говорит, что z, удовлетворяющее уравнениям (3), удовлетворяет также и уравнению (4), что и требовалось доказать.

Положим теперь, что дана система (1), подходящая под случай (I). Присоединим к системе уравнения

$$[F_i, F_j]=0, \tag{8}$$

комбинируя попарно на все возможные способы уравнения (1).

На основании доказанной теоремы каждое решение системы (1) удовлетворяет каждому из уравнений (8).

Может случиться, что каждое из этих присоединенных уравнений (8) есть алгебраическое следствие уравнений системы (1) и что из системы уравнений (1) и (8) могут быть найдены только те же из производных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ как из системы (1); тогда результат исключения этих производных из уравнений (8) дает тожества.

В этом случае система (1) называется *замкнутой*.

Теорема. *Какова бы ни была система (1), после ограниченного числа действий можно заменить ее замкнутой системой или убедиться, что она решений не имеет, или найти ее решение.*

Присоединим к системе (1) всевозможные уравнения (8). Если каждое из присоединенных уравнений будет алгебраическим следствием системы (1), то система (1) уже замкнута. Следовательно, если система (1) не замкнута, то мы имеем в уравнениях (1) и (8) систему, в которой число алгебраически независимых уравнений более m.

Подвергнем систему из уравнений (1) и (8) алгебраическому изучению, описанному в § 100.

Если мы натолкнемся на случай II, 2, то мы увидим, что система из уравнений (1) и (8) не имеет решений или найдем ее решение.

Если мы натолкнемся на случай I или II, 1, то мы заменим систему (1) новой, второй, системой того же вида, как система (1), но содержащею более уравнений, чем система (1); число уравнений в новой системе по крайней мере на одну единицу более числа уравнений системы (1), т. е. по крайней мере равно $m+1$.

С новой системой мы возобновим операцию и присоединим к ней новые уравнения вида (8), в левых частях которых стоят всевозможные скобки Якоби для уравнений новой системы.

Если эта новая вторая система не замкнута, то после алгебраического ее изучения мы или убедимся, что она не имеет решений, или найдем ее решение, или заменим ее новой, третьей, системой, в которой число уравнений алгебраически независимых относительно $p_1, \ldots, p_n$ по крайней мере на одну единицу более числа уравнений второй системы.

С этой третьей системой мы возобновим операции присоединения уравнений из приравниваемых нулю скобок Якоби, и будем описанные операции продолжать далее.

После $n-m+1$ возобновлений операции, если мы ранее не получим замкнутой системы или не убедимся, что система не имеет решений или не найдем решения, мы получим систему, содержащую не менее $n+1$ уравнений, которые все алгебраически независимы; из $n+1$ уравнений можно исключить n аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$; после исключения не может получиться тождество; значит будем иметь дело со случаем II, 2, и мы увидим, что система не имеет решений или найдем ее решение.

Из сказанного ясно, что теорема справедлива.

102. Нормальная система из m уравнений. Положим, что данная система из m уравнений

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

где

$$m \leqslant n$$

алгебраически независима относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и замкнута.

Решим уравнения (1) относительно некоторых m аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Нумеруя подобающим образом независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы можем считать, что получим систему

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1=p_1-f_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m=p_m-f_m(x_1, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n)=0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Теорема. *Если система уравнений* (1) *была замкнутой, то система уравнений* (9) *также замкнута.*

По заданию, каждое уравнение

$$[F_i, F_j]=0 \quad (8)$$

следствие уравнений (1), т. е. обращается в тожество, если мы заменим в нем $p_1, p_2, \ldots, p_m$ их значениями, найденными из уравнений (9). Надо доказать, что каждое уравнение

$$[\varphi_i, \varphi_j] = 0 \tag{8'}$$

есть следствие уравнений (9), т. е. обращается в тожество, если мы заменим в нем $p_1, p_2, \ldots, p_m$ их значениями, найденными из уравнений (9).

Так как из системы уравнений (1) можно найти $p_1, p_2, \ldots, p_m$, то можно считать, что якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_m)} \tag{10}$$

не равен тожественно нулю. Мы будем считать, что все аргументы в функциях F имеют такие начальные значения, что и начальное значение определителя (10) отлично от нуля.

Если мы в функциях

$$F_1, F_2, \ldots, F_m$$

заменим аргументы $p_1, p_2, \ldots, p_m$ их значениями $f_1, f_2, \ldots, f_m$, найденными решением системы (1), то мы обратим каждую из этих функций в нуль. Обозначая знаком (F) результат этой замены, т. е. положив

$$(F_i) = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, f_1, f_2, \ldots, f_m, p_{m+1}, \ldots, p_n),$$

выберем две какие-нибудь из этих функций, например F_1 и F_2 и рассмотрим тожества:

$$\left.\begin{aligned} (F_1) = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, f_1, f_2, \ldots, f_m, p_{m+1}, \ldots, p_n) \equiv 0 \\ (F_2) = F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, f_1, f_2, \ldots, f_m, p_{m+1}, \ldots, p_n) \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Дифференцируя (11) по $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, мы можем составить новые тожества.

Приступая к их составлению, отметим прежде всего тожества:

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial f_k}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial z} = -\frac{\partial f_k}{\partial z}; \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_h} = -\frac{\partial f_k}{\partial p_h}, \quad h > m;$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_k} = 1, \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_h} = 0, \qquad (h \leqslant m, \ h \neq k); \tag{12}$$

отметив это, имеем

$$\frac{\partial(F_1)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) - \sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} \equiv 0$$

$$\frac{\partial(F_1)}{\partial z} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_k}{\partial z} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - \sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\frac{\partial\varphi_k}{\partial z} \equiv 0.$$

Умножив второе из написанных тожеств на p_i и складывая с первым, воспользовавшись введенным в § 37 сокращенным обозначением

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dx_k}$$

и заменив $p_1, p_2, \ldots, p_m$ через $f_1, f_2, \ldots, f_m$, получаем

$$\left(\frac{dF_1}{dx_i}\right) - \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right) \equiv 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (13')$$

Продифференцируем теперь тожества (11) по p_i, считая, что $i > m$. Получаем

$$\frac{\partial (F_1)}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\right) + \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right) \frac{\partial f_k}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\right) - \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \equiv 0.$$

Но если $i \leqslant m$, мы имеем тожественно

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\right) \equiv \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i};$$

все $\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i}$, именно, равны нулю, если $i \neq k$, а $\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} = 1$.

Итак, при всех i справедливо тожество

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\right) \equiv \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (13'')$$

Аналогичные два тожества мы можем написать для функции F_2:

$$\left(\frac{dF_2}{dx_i}\right) = \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_l}\right)\left(\frac{d\varphi_l}{dx_i}\right) \qquad (13_1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_i}\right) = \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_l}\right) \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_i}. \qquad (13_2)$$

Умножим тожество (13″) на (13$_1$) и тожество (13$_2$) на (13′) и вычтем из первого произведения второе; мы получим

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\frac{dF_2}{dx_i} - \frac{\partial F_2}{\partial p_i}\frac{dF_1}{dx_i}\right) = \sum_{k=1}^{k=m}\sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_l}\right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i}\left(\frac{d\varphi_l}{dx_i}\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=m}\sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_l}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right) \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_i}\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m}\sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_l}\right) \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i}\left(\frac{d\varphi_l}{dx_i}\right) - \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_i}\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right) \right\}.$$

Давая в последнем тожестве i значения 1, 2, ..., n и складывая, получаем

$$([F_1, F_2]) \equiv \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{l=2}^{l=m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right) \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_l}\right) ([\varphi_k, \varphi_l]) \equiv 0, \qquad (14)$$

так как вследствие сказанного выше $[F_1, F_2]$ обращается в нуль по замене в ней $p_1, p_2, \ldots, p_m$ их значениями, найденными из системы (9), что при наших обозначениях переводится равенством

$$([F_1, F_2]) \equiv 0.$$

Так как F_1 и F_2 были выбраны нами среди левых частей системы (1) произвольно, мы можем вместо (14) написать тожества:

$$\sum_{k=1}^{k=m} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right) \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_l}\right) ([\varphi_k, \varphi_l]) \equiv 0, \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, m \\ j=1, 2, \ldots, m \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Выполняя в последнем равенстве сначала суммирование по k, дадим ему сначала вид

$$\sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right) \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_l}\right) ([\varphi_k, \varphi_l]) \equiv 0$$

и, положив затем

$$U_k^{(j)} = \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_l}\right) ([\varphi_k, \varphi_l]), \qquad (16)$$

вид

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\right) U_1^{(j)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\right) U_2^{(j)} + \ldots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\right) U_n^{(j)} \equiv 0. \qquad (17)$$

Последнее равенство справедливо при всех значениях i и j. Давая i значения $1, 2, \ldots, m$, получаем из него систему линейных уравнений, неизвестными в которой являются (16) и определитель которой есть определитель (10), не равный нулю; отсюда вытекает, что

$$U_h^{(j)} = 0, \qquad (h=1, 2, \ldots, m) \qquad (18)$$

Выбирая некоторое h, пишем подробнее равенство (18). Имеем

$$U_h^{(j)} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_1}\right) ([\varphi_h, \varphi_1]) + \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_2}\right) ([\varphi_h, \varphi_2]) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_m}\right) ([\varphi_h, \varphi_m]) \equiv 0.$$

Давая в последнем равенстве j значение $1, 2, \ldots, m$, получаем систему уравнений, определитель которой не равен нулю. Отсюда заключаем:

$$([\varphi_h, \varphi_g]) \equiv 0, \qquad \begin{pmatrix} g=1, 2, \ldots, m, \\ h=1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Последние же равенства говорят, что высказанная теорема справедлива.

103. Частный случай: $m=n$. Рассмотрим частный случай, когда $m=n$. В этом случае нахождение z сводится к последовательному интегрированию n обыкновенных уравнений первого порядка.

Действительно, в этом случае система (9) имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n = p_n - f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 \end{array}\right\} \tag{9_1}$$

причем система замкнута, если замкнута система (1).

Положим сначала, что уравнения системы не зависят от z. Тогда

$$[\varphi_i, \varphi_j] = (\varphi_i, \varphi_j) = -\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0. \tag{19}$$

Равенства (19) говорят, что

$$dz = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \ldots + f_n\,dx_n \tag{20}$$

полный дифференциал и что нахождение z сводится непосредственно к квадратурам. Самое общее значение z зависит от одной произвольной постоянной.

Если уравнения (9_1) зависят от z, то в уравнении (20) мы имеем уравнение в полных дифференциалах, к которому применимо все сказанное в главе четвертой. Вспоминая сказанное в главе четвертой, мы должны для нахождения решения уравнения (20) прежде всего убедиться, как вытекает из § 49 и 50, что система уравнений

$$\left.\begin{array}{c} X_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + f_1\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ X_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + f_2\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \ \ldots, \ X_m(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_m} + f_m\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \tag{21}$$

замкнутая. Составляя скобку Пуассона для X_1 и X_2, например, имеем

$$(X_1 X_2) = \left\{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\}\frac{\partial f}{\partial z} = -([\varphi_1, \varphi_2])\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0,$$

откуда ясно, что система (21) замкнута. Замкнутости же системы (21) достаточно для существования решения у уравнения (20), причем самое общее такое решение зависит от произвольной постоянной.

Если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$$

какое-нибудь решение системы (21), то z находится из уравнения

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c.$$

Вспоминая сказанное в § 54, приходим к следующему правилу. Положим, как в том параграфе, что символ $(f)_k$ обозначает результат подстановки

$$x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_k = x_k^{(0)}$$

в некоторую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$.

Тогда интегрирование уравнения (20) сводится к последовательному интегрированию дифференциалов

$$\left.\begin{array}{l} d(z)_1 = (f_2)_1\, dx_2 + (f_3)_1\, dx_3 + \ldots + (f_n)_1\, dx_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d(z)_{n-2} = (f_{n-1})_{n-2}\, dx_{n-1} + (f_n)_{n-2}\, dx_n, \\ d(z)_{n-1} = (f_n)_{n-1}\, dx_n. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Интегрирование по этой методе сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1, \qquad (23)$$

при условии

$$z = (z)_1, \text{ при } x_1 = x_1^{(0)}; \qquad (24)$$

уравнения

$$\frac{\partial (z)_1}{\partial x_2} = (f_2)_1 \qquad (23_1)$$

при условии

$$(z)_1 = (z)_2 \text{ при } x_2 = x_2^{(0)}, \qquad (24_1)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

уравнения

$$\frac{\partial (z)_{n-1}}{\partial x_n} = (f_n)_{n-1}, \qquad (23_{n-1})$$

при условии

$$(z)_{n-1} = c \text{ при } x_n = x_n^{(0)}. \qquad (24_{n-1})$$

Следовательно, интегрирование системы (9_1) сводится к последовательному интегрированию уравнений (23_{n-1}), (23_{n-2}), ..., (23_1) и (23), что и требовалось доказать.

104. Метода Лагранжа — Шарпи интегрирования уравнения с двумя независимыми переменными. Чтобы дать пример на приложение сказанного, укажем методу для интегрирования уравнения

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0 \qquad (25)$$

от двух независимых переменных x_1 и x_2, позволяющую просто составлять его полный интеграл. Метода состоит в присоединении к уравнению (25) уравнения

$$\Phi(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = a, \tag{25$_1$}$$

зависящего от произвольного постоянного a таким образом, чтобы, во-первых, уравнения (25) и (25_1) образовывали бы замкнутую систему уравнений и, чтобы, во-вторых, уравнения (25) и (25_1) были бы алгебраически независимы относительно p_1 и p_2.

Если уравнения (25) и (25_1) образуют замкнутую систему, то равенство

$$[F, \Phi] = \frac{\partial F}{\partial p_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial p_2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \\ - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0 \tag{26}$$

должно быть следствием уравнений (25) и (25_1) или, так как (25_1) зависит от произвольного постоянного a, а (26) от него не зависит, то следствием одного уравнения (25).

Если функция Φ такова, что уравнение (26) соблюдено тождественно, то система (25), (25_1) тем более будет замкнутой.

Примечание. Если скобка Якоби (F, Φ) тождественно равна нулю, то про систему из уравнений (25), (25_1) говорят, что она в *инволюции*.

Если условие (26) соблюдено тождественно, то функция $\Phi(x_1, x_2, z, p_1, p_2)$ решение уравнения (26), т. е. равенство (25_1) один из интегралов системы

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial F}{\partial z}} = \\ = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} p_2}, \tag{27}$$

т. е. системы, определяющей характеристические линии уравнения (25).

Мы видели, что равенство

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = h$$

один из интегралов системы (27). Нам надо, следовательно, найти только еще один интеграл этой системы, алгебраически независимый относительно p_1 и p_2 от уравнения (25), чтобы свести нахождение полного интеграла к интегрированию двух уравнений первого порядка.

В случае, когда уравнение (25) не зависит от z, скобка Якоби $[F, \Phi]$ обращается в скобку Пуассона. По нахождении решения соответствующей системы

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = -\frac{dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} \tag{27'}$$

решение задачи сводится к квадратурам.

Примеры. 1) Найти полный интеграл уравнения

$$x_2^2(x_1 p_1 + x_2 p_2) p_1 = z + x_2 p_2.$$

Уравнение (26) имеет вид:

$$(2x_2^2 x_1 p_1 + x_2^3 p_2)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + (x_2^3 p_1 - x_2)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) -$$
$$-(x_2^2 p_1^2 - p_1)\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - (3x_2^2 p_2 p_1 + 2x_2 x_1 p_1^2 - 2p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0.$$

Функция Φ, зависящая только от x_2 и p_1, удовлетворяет уравнению

$$x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = 0;$$

значит за решение уравнения можно взять

$$\Phi = p_1 x_2.$$

Система

$$x_2^2 \, (x_1 p_1 + x_2 p_2) \, p_1 = z + x_2 p_2$$
$$x_2 p_1 = a$$

замкнутая. Решая относительно p_1 и p_2, находим

$$p_1 = \frac{a}{x_2}, \quad p_2 = \frac{x_1 a^2 - z}{x_2 - x_2^2 a}.$$

Интегрирование данного уравнения сводится к интегрированию уравнения

$$dz = \frac{a}{x_2} dx_1 + \frac{x_1 a^2 - z}{x_2 - x_2^2 a} dx_2$$

или уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{a}{x_2}, \quad z = (z)_1 \quad \text{при} \quad x_1 = 0$$

$$\frac{\partial (z)_1}{\partial x_2} = -\frac{(z)_1}{x_2 - x_2^2 a}, \quad (z)_1 = b, \quad \text{при} \quad x_2 = 1.$$

Выполняя интегрирования, находим

$$(z)_1 = c \frac{x_2 a - 1}{x_2 a}, \quad z = \frac{a}{x_2} x_1 + c \frac{x_2 a - 1}{x_2 a}.$$

2) Найти полный интеграл уравнения

$$x_2 p_1 - x_1 p_2 - p_1 p_2 = 0. \tag{28}$$

Задача сводится к нахождению подобающего решения уравнения

$$(x_2 - p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - (x_1 + p_1)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0. \tag{29}$$

Так как одно из решений уравнения

$$\Phi = p_1^2 + p_2^2,$$

задача сведена к интегрированию системы в инволюции

$$x_2 p_1 - x_1 p_2 - p_1 p_2 = 0$$
$$p_1^2 + p_2^2 = a.$$

Алгебраическое решение этой системы, однако, неудобно. Заменив данное уравнение (28) уравнением

$$\frac{x_2}{p_2} - \frac{x_1}{p_1} - 1 = 0, \tag{28_1}$$

мы заменим уравнение (29) уравнением

$$\frac{x_1}{p_1^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{x_2}{p_2^2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{1}{p_1}\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \frac{1}{p_2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0, \tag{29_1}$$

которому удовлетворяет функция $\frac{p_1}{x_1}$.

Задача сводится к интегрированию системы

$$x_2 p_1 - x_1 p_2 - p_1 p_2 = 0$$
$$p_1 = a x_1,$$

которая замкнута, но не в инволюции.

Решая ее относительно p_1 и p_2, находим

$$p_1 = a x_1,\ \ p_2 = \frac{a x_2}{1 + a},\ \ dz = a x_1\, dx_1 + \frac{a x_2}{1 + a}\, dx_2,\ \ z = \frac{a x_1^2}{2} +$$
$$+ \frac{a x_2^2}{2(1 + a)} + b.$$

В главе десятой мы распространим методу этого параграфа на случай многих переменных и значительно ее пополним.

105. Частный случай: $m = n + 1$. Положим теперь, что имеется система из $n + 1$ уравнений

$$\left.\begin{array}{l} F_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{n+1}(x_1, x_2 \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{30}$$

такая, что определитель

$$\frac{D\,(F_1,\ \ldots,\ F_n,\ F_{n+1})}{D\,(p_1,\ \ldots,\ p_n, z)} \tag{31}$$

не равен тождественно нулю; приписав аргументам некоторые начальные значения, связанные уравнениями (30), так, чтобы начальное значение (31) было отлично от нуля, решаем систему (30) относительно $p_1, \ldots p_n, z$. Положим, что при этом мы получим систему

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n = p_n - f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi = z - f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{30'}$$

Из сказанного в § 100 вытекает, что мы можем считать задачу интегрирования системы оконченной; надо z, данное последним уравнением (30′), подставлять в остальные уравнения; если все они удовлетворятся, то нами найдено решение системы; в противном случае система не имеет решений.

Можно, однако, доказать, что когда система (30) замкнута, то z, данное последним уравнением (30′), наверное решение системы.

Итак, положим, что система (30) замкнута, т. е., что скобки Якоби

$$[F_i,\ F_j] = 0 \tag{32}$$

все равны нулю на основании уравнений системы.

Если мы условимся обозначать знаком

$$(F) = F\,(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\ f,\ f_1,\ \ldots, f_n)$$

результат замены в функции F аргументов $p_1, \ldots, p_n, z$ значениями (30′), то условие о замкнутости системы (30) переведется равенствами

$$([F_i,\ F_j]) \equiv 0, \tag{32'}$$

причем мы имеем тожества

$$(F_i) \equiv 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1)$$

Дифференцируя последние тожества по x_i, получаем, например,

$$\frac{\partial (F_1)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Прибавляя к правой части последнего тожества

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) f_i$$

и вычитая то же самое, получим

$$\left(\frac{dF_1}{dx_i}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - f_i\right) + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \equiv 0. \qquad (33)$$

По такой же причине имеем

$$\left(\frac{dF_2}{dx_i}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - f_i\right) + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \equiv 0. \qquad (33')$$

Умножим тожество (33′) на $\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\right)$, а тожество (33) на $\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_i}\right)$, вычтем второе произведение из первого, дадим i все значения от 1 до n и сложим полученные тожества.

Замечая, что

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_i}\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x_k},$$

получаем

$$([F_1, F_2]) + \sum_{i=1}^{i=n}\left\{\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\right\}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - f_i\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) \equiv 0.$$

Заменяя для удобства в последнем равенстве i через l, а F_1 и F_2 через F_i и F_j, даем ему, выделяя суммирование по l и пользуясь замкнутостью системы (30), вид

$$\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_l}\right)\left\{\left(\frac{\partial F_j}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_l} - f_l\right) + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)\right\} -$$

$$- \left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_l}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_l} - f_l\right) \equiv 0.$$

Положив

$$\left.\begin{aligned} U_l^{(j)} &= \left(\frac{\partial F_j}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_l} - f_l\right) + \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right) \\ U^{(j)} &= \sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_l}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_l} - f_l\right), \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

мы можем последнему равенству дать вид

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\right) U_1^{(j)}+\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\right) U_2^{(j)}+\ldots+$$
$$+\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\right) U_n^{(j)}-\left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right) U^{(j)}\equiv 0. \tag{35}$$

Последнее равенство справедливо при всех значениях i и j.

Давая i значения $1, 2, \ldots, n, n+1$, мы получим систему уравнений, которой удовлетворяют функции (34) и определитель которой равен значению определителя (31) и не равен тожественно нулю.

Отсюда заключаем, что

$$U_l^{(j)}=0, \quad (l=1, 2, \ldots, n), \ U^{(j)}=0.$$

Давая в первом равенстве j значения $1, 2, \ldots, n, n+1$, получаем систему из $n+1$ уравнений

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}-f_l\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_l}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_n}\right)\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_n}-\frac{\partial f_n}{\partial x_l}\right)\equiv 0,$$

определитель которой тот же определитель (31) и из которой между прочим получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}-f_l\equiv 0 \qquad (l=1, 2, \ldots, n).$$

Последние равенства говорят, что

$$z=f$$

есть, действительно, решение системы (30).

106. Теорема Коши. Переходя к интегрированию системы (1) положим, что она переделана в систему:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1=p_1-f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m=p_m-f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_{m+1}, \ldots, p_n)=0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

и что система (9) замкнута.

То обстоятельство, что система (9) замкнутая, записывается тожествами

$$([\varphi_i, \varphi_j])\equiv 0, \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, m \\ j=1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

в которых знак (F) обозначает результат замены $p_1, p_2, \ldots, p_m$ их значениями, данными уравнениями (9).

Теорема. *Система* (9) *имеет решение, в котором при*

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2,\ \ldots,\ x_m = x_m^{(0)}:\ z = \theta\ (x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n),$$

где $\theta(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ *произвольная функция ее аргументов; при этом, конечно, предполагается, что начальные значения аргументов таковы, что правые части уравнений* (9) *голоморфны вблизи них.*

Так как в прошлых главах установлена справедливость теоремы для случая $m = 1$, при доказательстве теоремы мы можем предполагать, что теорема справедлива, когда число уравнений $m - 1$.

Итак, предположим, что теорема справедлива, когда число уравнений равно $m - 1$ и докажем, что она справедлива и тогда, когда число уравнений равно m.

Приступая к доказательству, замечаем прежде всего, что в скобке Якоби

$$[\varphi_i,\ \varphi_j]$$

при $i > 1$, $j > 1$ не выполняется дифференцирований по x_1 и что она не зависит от p_1. Действительно, она могла бы зависеть от $\frac{d\varphi_i}{dx_1}$, $\frac{d\varphi_j}{dx_1}$ только в том случае, если бы функции φ_i, φ_j зависели от p_1, чего нет, если $i > 1$, $j > 1$.

Отсюда вытекает, что система уравнений

$$\varphi_2 = 0,\ \ldots,\ \varphi_m = 0$$

замкнута, если замкнута система (9), и что система

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi_2)_1 = p_2 - f_2\ (x_1^{(0)}, x_2,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varphi_m)_1 = p_m - f_m\ (x_1^{(0)},\ x_2,\ \ldots, x_n,\ z,\ p_{m+1},\ \ldots, p_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (9_1)$$

также замкнута.

Найдем, пользуясь заданием, то решение системы (9_1), в котором при

$$x_2 = x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_m = x_m^{(0)}:\ z = \theta\ (x_{m+1},\ \ldots,\ x_n).$$

Положим

$$z = \vartheta\ (x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1}, \ldots; x_n) \qquad (36)$$

это решение. По условиям имеем

$$\vartheta\ (x_2^{(0)}, x_3,\ \ldots,\ x_m^{(0)},\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_n) \equiv \theta\ (x_{m+1},\ \ldots, x_n). \qquad (37)$$

Ищем после этого то решение первого уравнения (9):

$$\varphi_1 = p_1 - f_1\ (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ z,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n) = 0, \qquad (33)$$

в котором при

$$x_1 = x_1^{(0)}:\ z = \vartheta\ (x_2,\ x_3,\ \ldots, x_m,\ x_{m+1},\ \ldots, x_n).$$

Положим

$$z = \Phi\ (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_m,\ x_{m+1},\ \ldots, x_n) \tag{39}$$

это решение. По выбору его имеем

$$\Phi\ (x_1^{(0)},\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ \ldots, x_n) \equiv \vartheta\ (x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

откуда, вследствие (37):

$$\Phi\ (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots, x_m^{(0)},\ x_{m+1},\ \ldots, x_n) \equiv \vartheta\ (x_2^{(0)}, x_3, \ldots, x_m^{(0)},\ x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv \theta\ (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n).$$

Из сказанного ясно, что функция (39) удовлетворяет начальным условиям теоремы. Мы докажем, что она удовлетворяет не только первому уравнению системы (9), но и всем остальным уравнениям этой системы.

Подставляем для этого найденное z в функции $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$, заменяя в них $p_1, \ldots, p_n$ соответствующими производными от функции Φ. Положим, что мы получим при этом

$$\varphi_2 = \omega_2,\ \ldots, \varphi_m = \omega_m.$$

Здесь $\omega_2, \ldots, \omega_m$ функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем каждая из этих функций обращается в нуль при $x_1 = x_1^{(0)}$, так как после такой замены система

$$\varphi_2 = 0,\ \ldots,\ \varphi_m = 0$$

обращается в систему

$$(\varphi_2)_1 = 0,\ \ldots,\ (\varphi_m)_1 = 0,$$

а z в ее решение.

Введем в рассмотрение уравнения

$$\psi_2 = \varphi_2 - \omega_2 = 0,\ \ldots,\ \psi_m = \varphi_m - \omega_m = 0; \tag{40}$$

каждому из этих уравнений удовлетворяет функция (39), удовлетворяющая уравнению (38); значит, на основании теоремы § 101, эта функция удовлетворяет и каждому из уравнений

$$[\varphi_1,\ \psi_2] = 0,\ [\varphi_1,\ \psi_3] = 0,\ \ldots,\ [\varphi_1,\ \psi_m] = 0.$$

Другими словами, если знак $\{F\}$ обозначает результат замены $p_1, \ldots, p_n, z$ их значениями, вычисленными по (39), то

$$\{[\varphi_1,\ \psi_i]\} \equiv 0, \qquad (i = 2, 3, \ldots, m)$$

Выбирая одно из уравнений (40), изучаем скобку $[\varphi_1,\ \psi_i]$.

Мы имеем на основании свойств скобок Якоби, установленных в § 37,

$$[\varphi_1,\ \psi_i] = [\varphi_1,\ \varphi_i - \omega_i] = [\varphi_1,\ \varphi_i] - [\varphi_1,\ \omega_i].$$

Но

$$[\varphi_1,\ \omega_i] = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} - \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial f_1}{\partial p_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k},$$

так как ω_i не зависят ни от z, ни от $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Далее

$$[\varphi_1,\ \varphi_i] = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{k=n} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_k} \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{d\varphi_1}{dx_k} \right),$$

откуда

$$\{[\varphi_1,\ \varphi_i]\} = \left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\right\} + \{f_1\}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right\} - \left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right\} - \{f_i\}\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right\} + \omega_i\left\{\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{k=n} \left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_k}\right\}\left\{\frac{d\varphi_i}{dx_k}\right\} - \left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k}\right\}\left\{\frac{d\varphi_1}{dx_k}\right\} = \omega_i\left\{\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\},$$

так как

$$\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\right\} + \{f_1\}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right\} - \left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right\} - \{f_i\}\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right\} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{k=n} \left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_k}\right\}\left\{\frac{d\varphi_i}{dx_k}\right\} - \left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k}\right\}\left\{\frac{d\varphi_1}{dx_k}\right\} = \{([\varphi_1,\ \varphi_i])\} \equiv 0.$$

Значит

$$\{[\varphi_1,\ \psi_i]\} = -\frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} + \sum_{k=m+1}^{k=n} \left\{\frac{\partial f_1}{\partial p_k}\right\} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \omega_i \left\{\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\} \equiv 0. \quad (41)$$

Уравнение (41) имеет решение, в котором при

$$x_1 = x_1^{(0)} \qquad \omega_i = 0; \quad (42)$$

при этом это решение единственное.

Так как функция ω_i удовлетворяет уравнению (41) и условию (42), то ω_i равна нулю тождественно, ибо очевидно, что нуль есть решение уравнения (41), удовлетворяющее условию (42).

Итак, тождественно

$$\omega_2 \equiv 0,\ \omega_3 \equiv 0,\ \ldots,\ \omega_m \equiv 0,$$

откуда ясно, что (39) есть решение системы (9) и что теорема доказана.

107. Решение задачи Коши. Доказанная теорема наводит на следующую методу интегрирования системы (9).

Если ищется то решение замкнутой системы

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0,\ \varphi_2 = p_2 - f_2 = 0,\ \ldots,\ \varphi_m = p_m - f_m = 0, \quad (9)$$

в котором при

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_m = x_m^{(0)} \qquad z = \theta\ (x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_m),$$

отделяем первое уравненне системы

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0 \qquad (38_1)$$

и составляем новую систему, заменив в остальных уравнениях x_1 через $x_1^{(0)}$.

Применяя обозначения, использованные в § 34 и 54, мы получаем систему

$$(\varphi_2)_1 = p_2 - (f_2)_1 = 0,\ (\varphi_3)_1 = p_3 - (f_3)_1 = 0,\ \ldots,$$
$$(\varphi_m)_1 = p_m - (f_m)_1 = 0. \qquad (9_1)$$

Отделяем первое уравнение системы

$$(\varphi_2)_1 = p_2 - (f_2)_1 = 0 \qquad (38_2)$$

и заменяем в остальных x_2 через $x_2^{(0)}$. Мы получаем систему

$$(\varphi_3)_2 = p_3 - (f_3)_2 = 0,\ \ldots,\ (\varphi_m)_2 = p_m - (f_m)_2 = 0, \qquad (9_2)$$

от которой снова отделяем первое уравнение

$$(\varphi_3)_2 = p_3 - (f_3)_2 = 0 \qquad (38_3)$$

и продолжаем так далее.

После $m-2$ операций мы получим систему

$$\left.\begin{aligned}(\varphi_{m-1})_{m-2} &= p_{m-1} - (f_{m-1})_{m-2} = 0,\\ (\varphi_m)_{m-2} &= p_m - (f_m)_{m-2} = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (9_{m-2})$$

от которой мы отделим первое уравнение

$$(\varphi_{m-1})_{m-2} = p_{m-1} - (f_{m-1})_{m-2} = 0 \qquad (38_{m-1})$$

и заменив в последнем уравнении x_{m-1} через $x_{m-1}^{(0)}$, получим систему

$$(\varphi_m)_{m-1} = p_m - (f_m)_{m-1} = 0 \qquad (9_{m-1})$$

из одного уравнения.

Для интегрирования системы (9) надо найти то решение

$$z = \vartheta_{m-1}\ (x_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_n) \qquad (43_{m-1})$$

уравнения (9_{m-1}), в котором при

$$x_m = x_m^{(0)}:\ z = \theta\ (x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n);$$

то решение уравнения (38_{m-1}):

$$z = \vartheta_{m-2}\ (x_{m-1},\ x_m,\ \ldots,\ x_n), \qquad (43_{m-2})$$

в котором при

$$x_{m-1} = x_{m-1}^{(0)}:\ z = \vartheta_{m-1}\ (x_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_n)$$

и так далее. Наконец, то решение уравнения (38_2):

$$z = \vartheta_1\ (x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n),$$

в котором при

$$x_2 = x_2^{(0)} \qquad z = \vartheta_2\ (x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_n)$$

и то решение

$$z = \vartheta\ (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n) \tag{44}$$

уравнения (38_1), в котором при

$$x_1 = x_1^{(0)} : z = \vartheta_1\ (x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n).$$

Решение (44) последнего уравнения будет искомым решением системы (9).

При интегрировании уравнения (9_{m-1}) по указанным начальным условиям придется, по схеме § 94, пользоваться интегралом $M^{(n-m)}$:

$$\left.\begin{aligned} &x_m^{(0)} = x_m^{(0)},\ x_{m+1}^{(0)} = u_{m+1},\ \ldots,\ x_n^{(0)} = u_n,\ z_0 = \vartheta\ (u_{m+1},\ \ldots, u_n) \\ &\qquad p_{m+1}^{(0)} = \frac{\partial\vartheta}{\partial u_{m+1}},\ \ldots,\ p_n^{(0)} = \frac{\partial\vartheta}{\partial u_n} \\ &p_m^{(0)} = f_m\left(x_1^{(0)},\ x_2,\ \ldots, x_m^{(0)},\ u_{m+1},\ \ldots,\ u_n,\ \frac{\partial\vartheta}{\partial u_{m+1}},\ \ldots,\ \frac{\partial\vartheta}{\partial u_n}\right) \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

и если функция $(f_m)_{m-1}$ голоморфна вблизи некоторых значений

$$x_m^{(0)},\ x_{m+1},\ \ldots, x_n,\ z,\ p_{m+1},\ \ldots, p_n, \tag{46}$$

принадлежащих этому $M^{(n-m)}$, то, по сказанному в том же параграфе, решение (43_{m-1}) будет существовать: коэффициент при p_m в уравнении (9_{m-1}) равен единице. Продолжая перебирать уравнения (38_{m-2}), $\ldots$, (38), убедимся, что условием существования у них решения является также голоморфность функций $(f_{m-1})_{m-2}, \ldots, (f_2)_1$, $(f)_1$ вблизи тех же начальных значений аргументов (46) и аргументов $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{m-1}$; начальные значения аргументов (46) не меняются при переходе от одного из интегралов (45) к другому.

Таким образом важнейшее значение при решении вопроса о существовании у данной системы (1) решения, удовлетворяющего поставленным условиям, имеет изучение определителя

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D\ (p_1, p_2, \ldots, p_m)}; \tag{10}$$

если он не равен нулю при некоторых, определенных интегралом $M^{(n-m)}$, начальных значениях аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ аргументов (46) и соответствующих им значениях $p_1,\ \ldots,\ p_m$, найденных из уравнений (1), то искомое решение существует.

108. Подстановка Майера. Введем, как в § 35, новые независимые переменные, положив

$$x_1 = x_1^{(0)} + y_1,\ x_2 = x_2^{(0)} + y_1 y_2,\ \ldots, x_m = x_m^{(0)} + y_1 y_m \tag{47}$$

сохраняя независимые переменные $x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n$.

Обозначая буквами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ производные по новым независимым переменным, имеем

$$\left.\begin{aligned} q_1 = p_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_m y_m, \\ q_2 = p_2 y_1,\ q_3 = p_3 y_1,\ \ldots, q_m = p_m y_1, \\ q_{m+1} = p_{m+1},\ \ldots,\ q_n = p_n. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

В новых переменных система (9) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} q_1 = f_1 + f_2 y_2 + \ldots + f_m y_m \\ q_2 = f_2 y_1,\ \ldots,\ q_m = f_m y_1 \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

считая, конечно, что в функциях f_i выполнена замена, соответствующая формулам (47) и (48).

Так как при $x_1 = x_1^{(0)}$ мы имеем $y_1 = 0$, мы получаем, применяя к системе (49) процесс прошлого параграфа, что ее интегрирование сводится к интегрированию уравнения

$$q_1 = f_1 + f_2 y_2 + \ldots + f_m y_m \tag{50}$$

и системы

$$q_2 = 0,\ q_3 = 0,\ \ldots,\ q_m = 0. \tag{51}$$

Систему (51) надо интегрировать при условии:

$$\text{при } x_2 = x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_m = x_m^{(0)}:\ z = \theta\ (x_{m+1},\ \ldots,\ x_n).$$

Ее решение, удовлетворяющее этому условию:

$$z = \theta\ (x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_n). \tag{52}$$

Следовательно, задача интегрирования системы (9) сведена к интегрированию уравнения (50) при условии:

$$\text{при}\quad y_1 = 0 \qquad z = \theta\ (x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots, x_n)$$

и, конечно, к возвращению к старым переменным. Это заключение называется теоремой С. Ли.

109. Пример. Найти решение системы

$$p_1 p_3 - x_1 x_3 = 0, \quad p_2 p_4 - x_2 x_4 = 0, \tag{53}$$

удовлетворяющее условию

$$z = mx_3 + nx_4 + r, \quad \text{если} \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0, \tag{54}$$

где m, n, r постоянные.

По плану § 107 мы должны сначала найти решение уравнения

$$p_2 p_4 - x_2 x_4 = 0 \tag{55}$$

при условии

$$z = mx_3 + nx_4 + r, \quad \text{если} \quad x_2 = 0. \tag{56}$$

Так как уравнение (55) не зависит ни от x_3, ни от p_3, то при его интегрировании можно считать x_3 и p_3 постоянными и заменить условие (56) условием

$$z = nx_4 + r_1, \quad \text{если} \quad x_2 = 0, \quad \text{где} \quad r_1 = nx_3 + r. \tag{56'}$$

Уравнения, определяющие характеристические линии для (55):

$$\frac{dx_2}{p_4}=\frac{dx_4}{p_2}=-\frac{dp_2}{-x_4}=-\frac{dp_4}{-x_2}=\frac{dz}{2p_2p_4}.$$

Соединяя первое и четвертое отношения, а также второе и третье, получаем два интеграла:

$$p_4{}^2-x_2{}^2=p_4^{(0)^2}-x_2^{(0)^2},\quad p_2{}^2-x_4{}^2=p_2^{(0)^2}-x_4^{(0)^2}. \tag{57}$$

Воспользовавшись уравнением (55), из равенства первого, третьего и пятого отношений получаем

$$\frac{p_2\,dx_2}{p_2p_4}=\frac{x_2\,dp_2}{x_2x_4}=\frac{dz}{p_2p_4+x_2x_4}=\frac{dx_2p_2-dz}{0},$$

откуда заключаем, что

$$z-x_2p_2=z_0-x_2^{(0)}p_2^{(0)}. \tag{57_1}$$

Таким же образом находим и последний интеграл

$$z-x_4p_4=z_0-x_4^{(0)}p_4^{(0)}. \tag{57_2}$$

Интеграл $M^{(1)}$, отвечающий основанию (56′), имеет вид

$$x_2^{(0)}=C,\ x_4^{(0)}=u,\ z_0=nu+r_1,\ \ p_4^{(0)}=n,\ \ p_2^{(0)}=0.$$

Значит искомое решение находим, исключая p_2, p_4, u из уравнений:

$$p_4{}^2-x_2{}^2=n^2,\quad p_2{}^2-x_4{}^2=-u^2$$

$$z-x_2p_2=nu+r_1,\quad z-x_4p_4=nu+r_1-nu=r_1.$$

Искомый результат исключения

$$z=x_4\sqrt{n^2+x_2{}^2}+r_1$$

или

$$z=mx_3+x_4\sqrt{n^2+x_2{}^2}+r.$$

Остается интегрировать уравнение

$$p_1p_3-x_1x_3=0 \tag{55_1}$$

при условии

$$z=mx_3+x_4\sqrt{n^2+x_2{}^2}+r,\qquad \text{если}\quad x_1=0. \tag{58}$$

Так как уравнение (55_1) не зависит от x_4 и p_4, последнее условие можно заменить условием:

$$z=mx_3+r_1,\quad \text{если}\quad x_1=0,\quad \text{где}\quad r_1=x_4\sqrt{n^2+x_2{}^2}+r. \tag{58_1}$$

Так как уравнение (55_1) вполне аналогично уравнению (55), можем сразу написать, что искомое решение его:

$$z=x_3\sqrt{m^2+x_1{}^2}+r_1$$

или

$$z=x_3\sqrt{m^2+x_1{}^2}+x_4\sqrt{n^2+x_2{}^2}+r. \tag{59}$$

110. Преобразование системы в независящую от z. В заключение заметим, что когда дана замкнутая система

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

мы можем, отыскивая вместо z уравнение

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0, \qquad (60)$$

которому z удовлетворяет, заменить ее интегрирование интегрированием замкнутой системы, не содержащей явно неизвестной функции.

Повторяя сказанное в § 78, мы увидим, что, отыскивая решение системы

$$\left.\begin{array}{l} F_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, -\dfrac{\dfrac{\partial W}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}, \ldots, -\dfrac{\dfrac{\partial W}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, -\dfrac{\dfrac{\partial W}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}, \ldots, -\dfrac{\dfrac{\partial W}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}\right) = 0 \end{array}\right\} \qquad (61)$$

и находя z из уравнения (60), мы теряем только особенные решения системы (1).

Действительно, всякое решение системы (1), которое получается из ее решения, зависящего от некоторого параметра, может быть восстановлено. Если уравнение (60) получается из уравнения

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = \alpha, \qquad (60_1)$$

дающего решение системы (1) заменою α нулем, то функция W тожественно удовлетворяет каждому из уравнений (61); эти уравнения, именно, не зависят от α. Особенными же решениями в случае системы нелинейных уравнений, так же, как и в случае системы линейных уравнений, называют те решения, которые не принадлежат семейству решений, зависящих от параметра.

Замкнутость системы (61) вытекает из установленного в § 43.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

О ПОЛНОМ ИНТЕГРАЛЕ ЛАГРАНЖА В СЛУЧАЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.

111. Основные определения. Положим, дана замкнутая система из m уравнений в виде

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

или в виде

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m = p_m - f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0\end{array}\right\} \qquad (2)$$

и положим, что найдено ее решение

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a), \qquad (3)$$

зависящее от $n-m+1$ произвольных постоянных

$$a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n, a. \qquad (4)$$

Отыскивая производные от z по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, присоединим к уравнению (3) уравнения

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial V}{\partial x_m} \qquad (5)$$

$$p_{m+1} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \quad p_{m+2} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n} \qquad (5')$$

Положим, что из $n+1$ уравнений (3), (5) и (5′) можно выделить $n-m+1$ так, чтобы из них можно было найти постоянные (4). В этом случае решение (3) называется полным интегралом системы (1), соответственно системы (2).

Найдя из некоторых $n-m+1$ уравнений (3), (5) и (5′) постоянные (4) и подставив их в оставшиеся уравнения, мы получим систему уравнений в частных производных, которая равносильна данной.

Действительно, обозначим через (A) группу из аргументов

$$z, p_1, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n, \qquad (6)$$

использованных при нахождении постоянных (4), через (B) группу из остальных аргументов (6).

Из уравнений (3), (5) и (5′), дающих элементы (A), постоянных (4) исключить нельзя. Подставляя найденные значения постоянных в уравнения группы (B), мы получим указанную систему уравнений в частных производных.

Замечаем прежде всего, что указанная система состоит из алгебраически независимых уравнений: ее уравнения, именно, решены относительно элементов группы (B), а правые части этих уравнений зависят только от элементов группы (A).

Если бы полученная система не была бы равносильна данной, то после исключения из данных уравнений, при ее помощи, элементов группы (B), получилась бы не тожественная зависимость между элементами группы (A). Эта зависимость должна обращаться в тожество после замены элементов группы (A) их значениями, данными уравнениями (3), (5) и (5′), так как (3) решение данной системы; но такое заключение говорило бы, что из уравнений группы (A) можно исключить постоянные (4), что невозможно по предположению.

Данное определение является обобщением определения § 57. Пример § 57 достаточно поясняет, что не всякое решение системы (1) или (2) из m уравнений, зависящее от $n-m+1$ параметров, может быть названо полным интегралом системы.

Заметим, однако, что если (3) то решение системы (2), в котором при

$$x_1 = x_1^{(0)}, \ \ldots, \ x_m = x_m^{(0)} : z = a_{m+1}x_{m+1} + \ldots + a_n x_n + a, \quad (7)$$

то (3) наверное полный интеграл системы (2).

Действительно, в этом случае при

$$x_1 = x_1^{(0)}, \ x_2 = x_1^{(0)}, \ \ldots, x_m = x_n^{(0)}$$

уравнения (3), (5′) обращаются в

$$z = a_{m+1}x_{m+1} + \ldots + a_n x_n + a, \quad p_{m+1} = a_{m+1}, \ \ldots, \ p_n = a_n$$

и, очевидно, разрешимы относительно параметров (4). Следовательно уравнения (3), (5′) при произвольных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_m$ должны допускать решение относительно этих параметров.

Из сказанного, например, ясно, что найденное нами в § 109 решение

$$z = x_3 \sqrt{m^2 + x_1^2} + x_4 \sqrt{n^2 + x_2^2} + r$$

системы

$$p_1 p_3 - x_1 x_3 = 0, \qquad p_2 p_4 - x_2 x_4 = 0$$

есть ее полный интеграл.

В § 107 мы показали, что система (3) имеет решение, удовлетворяющее условию (7), если, конечно, начальные значения $x_1^{(0)}, \ \ldots, \ x_m^{(0)}$ выбраны так, чтобы уравнения (2) оставались голоморфными вблизи них. Из этого вытекает, что всякой замкнутой системе можно привести в соответствие полный интеграл.

Если, желая избежать употребления многозначных функций, мы вместо того, чтобы задавать z уравнением (3), зададим его неявно уравнением

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) = 0, \quad (3')$$

мы можем, при наличии уравнения (3′), заменить уравнения (5) и (5′) уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial z} p_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial W}{\partial z} p_m + \frac{\partial W}{\partial x_m} = 0 \quad (5_*)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} p_{m+1} + \frac{\partial W}{\partial x_{m+1}} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial W}{\partial z} p_n + \frac{\partial W}{\partial x_n} = 0; \quad (5_*')$$

уравнения (5_*), $(5_*')$, конечно, передают производные от z только после исключения из них z при посредстве уравнения (3′); но приписав к ним уравнение (3′) и имея в виду, что исключению подлежат $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$, мы можем сохранить их в виде (5_*).

В заключение укажем на некоторые частные случаи.

Если система (1) разрешима относительно производных p_1, $p_2, \ldots, p_m$ или непосредственно дана в виде (2), то уравнения (3) и (5′) должны быть разрешимы относительно постоянных (4); иначе из них можно было бы эти постоянные исключить и найти зависимость, не содержащую $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

В указанном случае якобиан

$$\frac{D\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{D(a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n)} \tag{8}$$

не тожественно нуль при подобающей нумерации аргументов (4). Из сказанного в § 57 ясно, что он равен якобиану

$$\frac{D\left(\dfrac{\partial V}{\partial a_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial a_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial a_n}\right)}{D(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)}. \tag{8'}$$

Повторяя рассуждения § 57, мы можем убедиться, что в случае, когда уравнения системы (1) не зависят от z, полному интегралу (3) можно придать вид

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n) + a, \tag{3_*}$$

в котором одна из постоянных входит аддитивно.

Во-первых, так как вместе с любым z также и $z - a'$ решение системы в этом случае, уравнение (3) можно заменить уравнением

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) + a';$$

во-вторых из уравнений (5) и (5′) можно найти только $n - m$ аргументов (4) и, значит, один из них можно заменить определенным постоянным числом.

112. Примеры. Метода отделения переменных. На примерах § 58 мы имели случай убедиться, что в некоторых случаях составление полного интеграла не представляет затруднений. Мы укажем в этом параграфе один прием общего характера, облегчающий нахождение такого интеграла. Мы будем при этом предполагать, что уравнения системы не зависят от z.

Условимся говорить, что в функциях φ и ψ переменные отделены, если функция φ зависит только от тех пар

$$(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots, (x_n, p_n), \tag{9}$$

от которых ψ не зависит.

Тогда

$$(\varphi, \psi) \equiv 0;$$

последнее ясно из того, что в скобке Пуассона производная по x_i от ψ всегда помножается на производную φ по p_i, которая в одной паре с x_i.

Следовательно система

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0$$

замкнутая.

Займемся случаем одного уравнения:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0. \tag{10}$$

Положим, что умножая уравнение на некоторую функцию от аргументов x_i, p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно дать ему вид

$$\mu\omega(x_j, p_j, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k) = 0, \tag{10'}$$

где в функциях

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$$

пары (9) отделены друг от друга и от пар, оставшихся явно в ω.

Мы найдем полный интеграл уравнения (10), найдя полные интегралы уравнений

$$\varphi_1 = a_1, \varphi_2 = a_2, \ldots, \varphi_k = a_k \tag{11}$$

$$\omega(x_j, p_j, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \tag{11'}$$

в которых $a_1, a_2, \ldots, a_k$ произвольные постоянные.

Если

$$z = V_1 + b_1, \quad z = V_2 + b_2, \ \ldots, \quad z = V_k + b_k,$$

полные интегралы уравнений (11), а

$$z = V_0 + a_0$$

полный интеграл уравнения (11′), то полный интеграл уравнения (10):

$$z = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_k + a_0. \tag{12}$$

Действительно, если функция φ_i зависит от $x_{s+1}, \ldots, x_l$, то уравнения (5) и (5′) составлены из равенств

$$p_j = \frac{\partial V_j}{\partial x_j}, \quad \text{если} \quad s + 1 \leqslant j \leqslant l. \tag{13}$$

Отсюда ясно, что (12) решение уравнения

$$\varphi_i = a_i. \tag{14}$$

Из равенств (13) можно найти все постоянные интеграла

$$z = V_i,$$

кроме аддитивной b_i; равенство (14) представляет результат исключения из уравнений (13); так как (14) дает a_i, ясно, что из уравнений (13) можно найти все постоянные, входящие в V_i, и a_i. Так как (12) удовлетворяет каждому из уравнений (11) и (11′), z есть решение уравнения (10); уравнения, соответствующие (5) и (5′), по выясненному дают возможность найти все постоянные, входящие в $V_0, V_1, \ldots, V_k$, число которых $n - k - 1$ и постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_k$, число которых k; последней постоянной в (12) является a_0; значит z действительно полный интеграл уравнения (10).

Для системы (11), (11′) равенство (12) служит полным интегралом. В (12), именно, кроме $a_1, \ldots, a_k$, имеется еще $n - k$ произвольных постоянных; число же произвольных постоянных, входящих в полный интеграл системы из $k + 1$ уравнений равно $n - k - 1 + 1 = n - k$.

Обратно, всякий полный интеграл системы (11), (11′) служит полным интегралом уравнения (10); удовлетворяя уравнениям системы (11) и (11′), он удовлетворяет и уравнению (10), которое является следствием уравнений системы.

Первый и третий примеры § 58 построены при помощи указанных соображений.

Рассмотрим еще один пример, заимствуя его из книги В. Г. Имшенецкого.

Пример. Найти полный интеграл уравнения

$$z=\frac{1}{x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)+x_2^2x_3\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2. \tag{15}$$

Отыскивая вместо z уравнение, его дающее,

$$W(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ z)=0$$

и обозначая через p_1, p_2, p_3, p_4 производные от W по x_1, x_2, x_3, z, получаем для W уравнение

$$zp_4^2=\frac{p_1^2}{x_1}+x_2p_2\left(\frac{p_1}{x_1}+p_3\right)+x_2^2x_3p_2^2. \tag{15′}$$

Переменные (z, p_4) и $(x_2 p_2)$ отделяются от остальных. Положив

$$zp_4^2=a_4, \qquad x_2p_2=a_2, \tag{16}$$

получаем уравнение

$$\frac{p_1^2}{x_1}+a_2\frac{p_1}{x_1}+a_2p_3+a_2^2x_3=a_4.$$

В последнем уравнении пары $(x_1,\ p_1)$, $(x_3,\ p_3)$ также отделены. Его интеграл значит найдем, положив

$$\frac{p_1^2}{x_1}+a_2\frac{p_1}{x_1}=a_1, \quad a_2p_3+a_2^2x_3=a_4-a_1. \tag{16′}$$

Полные интегралы уравнений (16) и (16′) соответственно:

$$W=2\sqrt{a_4z}+b_4, \quad W=a_2\log x_2+b_2,$$

$$W=-\frac{a_2}{2}x_1+\frac{2}{3}\frac{1}{a_1}\sqrt{\left(\frac{a_2^2}{4}+a_1x_1\right)^3}+b_1$$

$$W=\frac{a_4-a_1}{a_2}x_3-\frac{a_2^2}{2}x_3^2+a_3.$$

Значит

$$W=2\sqrt{a_4z}+a_2\log x_2-\frac{a_2}{2}x_1+\frac{2}{3}\frac{1}{a_1}\sqrt{\left(\frac{a_2^2}{4}+a_1x_1\right)^3}+$$
$$+\frac{a_4-a_1}{a_2}x_3-\frac{a_2^2}{2}x_3^2+a_3.$$

Приравняв W нулю и заменив a_4 единицей, легко убедиться, что из уравнений (3), (5) и (5′), соответствующих найденному интегралу, можно найти a_1, a_2, a_3. Значит то z, которое таким образом может быть найдено, полный интеграл уравнения (10).

Положим теперь, что в более общем случае система (1) из m уравнений может быть заменена системой из m_1 уравнений, распадающейся на несколько замкнутых систем, связывающих группы пар (9) таким образом, что пары некоторой группы, встречающиеся в одной из систем, не встречаются в других. Положим, что новая система зависит от $m_1 - m$ параметров таким образом, что, с одной стороны, эти все параметры могут быть найдены, с другой стороны, старая система (1) получается исключением этих параметров.

Тогда полный интеграл новой системы вместе с тем и полный интеграл старой; при этом такой полный интеграл может быть найден сложением правых частей полных интегралов отдельных систем и заменою суммы аддитивных постоянных одною.

Например, переписав систему § 109 в виде

$$\frac{p_1}{x_1}\frac{p_3}{x_3} - 1 = 0, \qquad \frac{p_2}{x_2}\frac{p_4}{x_4} - 1 = 0,$$

мы можем заменить ее системой

$$\frac{p_1}{x_1} = a_1, \qquad \frac{p_3}{x_3} = \frac{1}{a_1}, \qquad \frac{p_2}{x_2} = a_2, \qquad \frac{p_4}{x_4} = \frac{1}{a_2}.$$

Полные интегралы отдельных систем:

$$z = \frac{a_1}{2}x_1^2 + a_1, \qquad z = \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{a_1} + a_2, \qquad z = \frac{1}{2}a_2x_2^2 + a_3,$$

$$z = \frac{1}{2}\frac{1}{a_4}x_4^2 + a_4.$$

Полный интеграл данной системы:

$$z = \frac{a_1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{x_3^2}{a_1} + \frac{1}{2}a_2x_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{a_2}x_4^2 + a_3.$$

113. Нахождение решений по полному интегралу. Давая в равенстве (3) или (3′) постоянным $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$, a различные значения, мы получаем различные решения системы (1). Но кроме этих решений, как и в случае одного уравнения, из полного интеграла можно получать решения, заменяя аргументы $a_{m+1}, \ldots, a_n$, a функциями от $x_1, \ldots, x_n$.

Остановимся, для определенности, на случае, когда система (1) приведена к виду (2), а полный интеграл дан в виде (3).

Уравнения (2) получаются путем нахождения $a_{m+1}, \ldots, a_n$, a из уравнений (3) и (5′) и подстановкой найденных значений в уравнения (5).

Значит, если мы вместо $a_{m+1}, \ldots, a_n$, a подставим в (5) такие функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы равенства (5) и (5′) оставались справедливыми, z останется решением системы.

Дифференцируя (3), не считая $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$ постоянными и заменяя dz его значением, имеем

$$p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n + \\ + \frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} da_{m+1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n + \frac{\partial V}{\partial a} da. \tag{17}$$

При наличии равенства (17) равенства (5) и (5′) остаются справедливыми, если

$$\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} da_{m+1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n + \frac{\partial V}{\partial a} da = 0. \tag{NB}$$

Из последнего равенства, как в § 59, мы можем заключить, что аргументы (4) связаны, вообще говоря, по крайней мере одной зависимостью. Действительно, подставляя в (NB) вместо дифференциалов этих аргументов их значения и приравнивая нулю коэффициенты при $dx_1, \ldots, dx_n$, получаем

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial a_{m+1}} \dfrac{\partial a_{m+1}}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial a_n} \dfrac{\partial a_n}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V}{\partial a} \dfrac{\partial a}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_{m+1}} \dfrac{\partial a_{m+1}}{\partial x_n} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial a_n} \dfrac{\partial a_n}{\partial x_n} + \dfrac{\partial V}{\partial a} \dfrac{\partial a}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right\} \tag{18}$$

Из равенств (18) заключаем, что или все определители порядка $n-m+1$ таблицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial a_{m+1}}{\partial x_1}, & \ldots, \dfrac{\partial a_n}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial a}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial a_{m+1}}{\partial x_n}, & \ldots, \dfrac{\partial a_n}{\partial x_n}, & \dfrac{\partial a}{\partial x_n} \end{array} \right\| \tag{19}$$

равны нулю, или справедливы равенства

$$\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = 0. \tag{20}$$

Если справедливы равенства (20), то найденное решение мы будем называть *особенным*.

Если равны нулю все указанные определители таблицы (19), то аргументы (4) связаны по крайней мере одной зависимостью, что мы и утверждали.

Положим, что они связаны $k+1$ зависимостями

$$\left.\begin{array}{l} a = \vartheta(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\ a_{m+1} = \vartheta_{m+1}(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+k} = \vartheta_{m+k}(a_{m+k+1}, \ldots, a_n). \end{array}\right\} \tag{21}$$

Нахождение значений $a, a_{m+1}, \ldots, a_n$ тогда не представляет уже затруднений.

Считая, что зависимостями (21) исчерпывается вся связь между аргументами (4), подставляем в (NB) вместо аргументов (4) их значения (21) и приравниваем нулю коэффициенты при

$$da_{m+k+1}, \ldots, da_n.$$

Мы получаем равенства

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial \vartheta}{\partial a_{m+k+1}}+\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}\frac{\partial \vartheta_{m+1}}{\partial a_{m+k+1}}+\\ &+\ldots+\frac{\partial V}{\partial a_{m+k}}\frac{\partial \vartheta_{m+k}}{\partial a_{m+k+1}}+\frac{\partial V}{\partial a_{m+k+1}}=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial \vartheta}{\partial a_n}+\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}\frac{\partial \vartheta_{m+1}}{\partial a_n}+\\ &+\ldots+\frac{\partial V}{\partial a_{m+k}}\frac{\partial \vartheta_{m+k}}{\partial a_n}+\frac{\partial V}{\partial a_n}=0 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Присоединив к этим $n-m-k$ равенствам (22) равенства (21), мы находим всего $n-m+1$ равенств, из которых могут быть найдены, вообще говоря, все аргументы (4).

Таким образом мы можем составлять различные решения системы (2), пользуясь возможностью вводить в рассмотрение различные произвольные функции.

Отметим, что число равенств (22), которое можно выбирать произвольно, не характеризует выбранного решения, а зависит от формы полного интеграла (3): для получения одного и того же решения из различных полных интегралов приходится иногда давать k различные значения. Это обстоятельство достаточно разъяснено в § 60 для частного случая одного уравнения.

Заменив в (3) параметры $a, a_{m+1}, \ldots, a_k$ их значениями (21), мы получим семейство поверхностей в пространстве $n+1$ измерений, зависящих от $n-m-k$ параметров. Формулы (22) показывают, что найденное решение определяет огибающую этого семейства.

В качестве огибающей, найденное решение есть геометрическое место многообразий, образованных точками, принадлежащими поверхности (3) и смежными с нею. Измерение этих многообразий колеблется от m в случае, когда число уравнений (21) равно одному, до $n-1$, когда число этих уравнений $n-m$.

114. Характеристическое многообразие. Положим, что замкнутая система дана в виде

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ \ldots, \ \varphi_m = p_m - f_m = 0 \quad (2)$$

и известен ее полный интеграл:

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a). \quad (3)$$

Задание уравнений (2) равносильно заданию $n+1$ уравнений уравнения (3) и уравнений:

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial V}{\partial x_m} \tag{5}$$

$$p_{m+1} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \quad \ldots, p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}. \tag{5'}$$

Напомним, что из уравнений (3) и (5′) могут быть найдены аргументы $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$; иначе (3) не было бы полным интегралом.

Положим, далее, дано не особенное решение системы (2):

$$z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{23}$$

т. е. дана поверхность в пространстве, число измерений которого $n+1$.

Решение (23) может быть получено из полного интеграла (3). если мы свяжем аргументы $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$ некоторыми зависимостями, число которых колеблется от 1 до $n-m+1$. Положим, что эти аргументы (4) надо связать $k+1$ зависимостями

$$\left.\begin{aligned} a &= \vartheta(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\ a_{m+1} &= \vartheta_{m+1}(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+k} &= \vartheta_{m+k}(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

На основании сказанного в прошлом параграфе задание решения (23) равносильно заданию уравнений

$$\left.\begin{aligned} & z = V(x_1, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots a_n, a) \\ & a = \vartheta(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\ & a_{m+1} = \vartheta_{m+1}(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{m+k} = \vartheta_{m+k}(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\ & \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial \vartheta}{\partial a_{m+k+1}} + \frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}\frac{\partial \vartheta_{m+1}}{\partial a_{m+k+1}} + \\ & + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_{m+k}}\frac{\partial \vartheta_{m+k}}{\partial a_{m+k+1}} + \frac{\partial V}{\partial a_{m+k+1}} = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial \vartheta}{\partial a_n} + \frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}\frac{\partial \vartheta_{m+1}}{\partial a_n} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_{m+k}}\frac{\partial \vartheta_{m+k}}{\partial a_n} + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{23$_1$}$$

Решение (23) получается из (23_1) исключением $n-m+1$ параметров (4).

Заменим систему (23_1) другою, вводя в рассмотрение новые $n-m$ параметров и связывая их тут же новыми $n-m$ уравнениями. Ясно, что система (23_1) равносильна системе

$$\left.\begin{array}{c}
z=V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \\
\dfrac{\partial V}{\partial a}b_{m+1}+\dfrac{\partial V}{\partial a_{m+1}}=0, \ \ldots, \quad \dfrac{\partial V}{\partial a}b_n+\dfrac{\partial V}{\partial a_n}=0 \\
a=\vartheta(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\
a_{m+1}=\vartheta_{m+1}(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m+k}=\vartheta_{m+k}(a_{m+k+1}, \ldots, a_n) \\
\dfrac{\partial\vartheta}{\partial a_{m+k+1}}=b_{m+1}\dfrac{\partial\vartheta_{m+1}}{\partial a_{m+k+1}}+ \\
+\ldots+b_{m+k}\dfrac{\partial\vartheta_{m+k}}{\partial a_{m+k+1}}+b_{m+k+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial\vartheta}{\partial a_n}=b_{m+1}\dfrac{\partial\vartheta_{m+1}}{\partial a_n}+\ldots+b_{m+k}\dfrac{\partial\vartheta_{m+k}}{\partial a_n}+b_n
\end{array}\right\} \quad (23_2)$$

Мы можем, именно, считать, что на данном решении производная $\dfrac{\partial V}{\partial a}$ не равна нулю; параметр a ничем кроме своего обозначения не отличается от других параметров $a_{m+1}, \ldots, a_n$, входящих в (3), и мы можем, следовательно, за a взять тот, для которого производная $\dfrac{\partial V}{\partial a}$ не нуль; одна же из производных

$$\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n}, \quad \frac{\partial V}{\partial a}$$

наверное не нуль, так как иначе решение (23) было бы особенным, чего нет по предположению.

Исключая из уравнений (23_2) параметры $a_{m+1}, \ldots, a_n, b_{m+1}, \ldots, b_n$, мы получим поверхность (23). Приступая к этому исключению, мы исключим сначала из уравнений (23_2) первой и второй строки параметры $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$. Мы получим $n-m+1$ уравнений, зависящих от $n-m$ параметров $b_{m+1}, \ldots, b_n$. Эти уравнения, зависящие от $n+1$ переменных

$$z, x_1, \ldots, x_n$$

определяют в пространстве измерения $n+1$ некоторое многообразие измерения

$$n+1-(n-m+1)=m.$$

Итак, мы определили некоторое многообразие A_m измерения m, зависящее от $n-m$ параметров $b_{m+1}, \ldots, b_n$.

Так как исключение этих параметров приводит к поверхности (23), поверхность (23) есть геометрическое место многообразий A_m.

Многообразие A_m мы будем называть *характеристическим многообразием, расположенным на решении* (23). Семейство характеристических многообразий, расположенных на некотором решении системы (2), зависит от $n-m$ параметров.

Введем теперь в рассмотрение семейство многообразий C_m измерения m, зависящих от $2(n-m)+1$ параметров и определяемых теми уравнениями (23_2), которые находятся в первых двух строках:

$$\left.\begin{aligned} &z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \\ &\frac{\partial V}{\partial a} b_{m+1} + \frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} b_n + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Примечание. Рассуждая как в § 62 и 69, мы можем убедиться, что параметры $b_{m+1}, \ldots, b_n$ независимы от параметров $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$.

Предположение, что существует зависимость вида

$$\omega(b_{m+1}, \ldots, b_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) = 0$$

равносильно предположению, что из функций

$$\frac{\partial V}{\partial a}, \quad \frac{V}{\partial a_{m+1}}, \quad \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n}$$

можно исключить $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Из равенства же нулю определителей таблицы

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_{m+1}\, \partial x_i}, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial a_n\, \partial x_i} \right\| \qquad (i = m+1, \ldots, n)$$

вытекает, что из производных

$$\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \quad \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

могут быть исключены все постоянные $a, a_{m+1}, \ldots, a_n$, чего нет, если уравнения системы зависят от z.

Если уравнения системы не зависят от z и a — аддитивная постоянная, то исключение $x_{m+1}, \ldots, x_n$ должно выполняться из одних функций

$$\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}, \quad \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n}$$

откуда якобиан $\dfrac{D\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{D(a_{m+1}, \ldots, a_n)}$ равен нулю, чего нет.

Из доказанного ясно, что из уравнений (24) второй строки можно найти $n-m$ аргументов из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и что (24) действительно многообразие измерения m в пространстве $n+1$ измерений.

Многообразия C_m мы назовем характеристическими многообразиями системы (2).

Выразив в них $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$ некоторым образом через $b_{m+1}, \ldots, b_n$, мы преобразуем многообразия C_m в многообразия A_m, лежащие на некотором решении системы (2).

Если мы в уравнениях (24) заменим $a_{m+1}, \ldots, a_n, a, b_{m+1}, \ldots, b_n$, какими-нибудь функциями от некоторых $n-m$ параметров, скажем $u_{m+1}, \ldots, u_n$, то мы обратим C_m в некоторое многообразие, зависящее от $n-m$ параметров. Возникает вопрос, каковыми должны быть указанные функции, чтобы полученное многообразие было некоторым A_m, т. е. многообразием, расположенным на некотором решении системы (2).

С таким вопросом мы уже имели дело в случае, когда $m=1$ в § 69. Для того чтобы полученное из (24) многообразие было некоторым A_m, надо чтобы после исключения параметров $u_{m+1}, \ldots, u_n$ получалась определенная функция z и чтобы эта функция стала решением системы (2), т. е. чтобы z и ее производные удовлетворяли системе (2).

Производные $p_1, \ldots, p_n$ от z это то, что находится из уравнения

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n. \tag{25}$$

Уравнения (2) соблюдены, если соблюдены уравнения

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \tag{3}$$

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, p_m = \frac{\partial V}{\partial x_m} \tag{5}$$

$$p_{m+1} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \ldots, p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}. \tag{5'}$$

Первое из этих уравнений соблюдено, так как оно первое из уравнений (24).

Дифференцируя его, имеем

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n + \\ + \frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} da_{m+1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n + \frac{\partial V}{\partial a} da.$$

Из последнего равенства ясно, что уравнения (3), (5) и (5′) соблюдены тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} da_{m+1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n + \frac{\partial V}{\partial a} da = 0, \tag{№}$$

т. е., вследствие вторых уравнений (24), тогда и только тогда, когда

$$da = b_{m+1}da_{m+1} + \ldots + b_n da_n; \tag{25'}$$

как мы указывали выше, можно, именно, считать, что $\frac{\partial V}{\partial a} \neq 0$.

Итак, замена в многообразиях C_m их параметров

$$a_{m+1},\ a_{m+2},\ \ldots,\ a_n,\ a,\ b_{m+1},\ \ldots,\ b_n$$

функциями от некоторых $n-m$ параметров $u_{m+1}, \ldots, u_n$ преобразует семейство C_m в семейство A_m тогда и только тогда, когда соблюдено условие (№).

При соблюдении условия (25′) исключение параметров $u_{m+1}, \ldots, u_n$ даст решение системы (2), если результатом этого исключения будет одна зависимость между $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Основываясь на данных определениях, можно, однако, думать, что состав семейства многообразий C_m или многообразий A_m зависит от выбранного полного интеграла.

Мы докажем, что это не так: выбором интеграла обусловлен только выбор параметров семейства и, следовательно, только выбор элементов, характеризующих отдельные многообразия семейства.

Подобно тому, как мы сделали это в § 62 и 70, мы установим именно, что характеристическое многообразие C_m может быть найдено интегрированием системы в полных дифференциалах, вполне определенной, как только дана замкнутая система (2). Мы откладываем на несколько параграфов вывод этой системы, чтобы поставить его ближе к ее непосредственным приложениям; в ближайших же параграфах мы разберем несколько вопросов, позволяющих решать задачи по данному полному интегралу.

115. Интегральный элемент. Когда дана интегральная поверхность — решение системы (2) — то всякая точка ее определяет не только ее координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, но также и коэффициенты касательной плоскости к этой поверхности, т. е. производные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ от z по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Совокупность чисел

$$M^{(0)}(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_1^{(0)},\ p_2^{(0)}, \ldots,\ p_n^{(0)}) \tag{26}$$

называется интегральным элементом системы (2), если эти числа связаны соотношениями:

$$\left.\begin{array}{l} p_1^{(0)} - f_1(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_{m+1}^{(0)}, \ldots,\ p_n^{(0)}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m^{(0)} - f_m(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_{m+1}^{(0)}, \ldots,\ p_n^{(0)}) = 0 \end{array}\right\} \tag{27}$$

Теорема 1. *По интегральному элементу $M^{(0)}$ можно, вообще говоря, найти проходящее через точку m $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^0)$, характеристическое многообразие измерения m некоторого решения, содержащего элемент $M^{(0)}$.*

Положим, что

$$\left.\begin{aligned} &z = V(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ a^{(0)}_{m+1},\ \dots,\ a^{(0)}_n,\ a^{(0)}) \\ &\frac{\partial V}{\partial a^{(0)}} b^{(0)}_{m+1} + \frac{\partial V}{\partial a^{(0)}_{m+1}} = 0,\ \dots,\ \frac{\partial V}{\partial a^{(0)}} b^{(0)}_n + \frac{\partial V}{\partial a^{(0)}_n} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

уравнения искомого многообразия. Знаками

$$\frac{\partial V}{\partial a^{(0)}},\quad \frac{\partial V}{\partial a^{(0)}_{m+1}},\quad \dots,\quad \frac{\partial V}{\partial a^{(0)}_n},$$

как и раньше, мы обозначаем результаты замены в соответствующих производных от V аргументов $a,\ a_{m+1},\ \dots,\ a_n$ их значениями $a^{(0)},\ a^{(0)}_{m+1},\ \dots,\ a^{(0)}_n$.

Многообразие (28) должно заключать точку m_0, т. е. должны быть справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} &z^{(0)} = V(x^{(0)}_1,\ x^{(0)}_2,\ \dots,\ x^{(0)}_n,\ a^{(0)}_{m+1},\ \dots,\ a^{(0)}_n,\ a^{(0)}) \\ &\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 b^{(0)}_{m+1} + \left(\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}\right)_0 = 0,\ \dots,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 b^{(0)}_n + \left(\frac{\partial V}{\partial a_n}\right)_0 = 0 \end{aligned}\right| \tag{28'}$$

в которых знаками

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0,\ \dots,\ \left(\frac{\partial V}{\partial a_n}\right)_0$$

обозначены результаты замены в соответственных производных от V всех аргументов $x_i,\ a_i$ числами $x^{(0)}_i,\ a^{(0)}_i$.

Когда известны числа $a^{(0)},\ a^{(0)}_{m+1},\dots,a^{(0)}_n,\ b^{(0)}_{m+1},\dots,b^{(0)}_n$ можно на бесчисленное множество способов подобрать функции ϑ, $\vartheta_{m+1},\dots,\vartheta_{m+k}$ в уравнениях (23_2) так, чтобы эти числа им удовлетворяли. Выбор функций ϑ приведет к нахождению функций a, $a_{m+1},\ \dots,\ a_n$, значения которых в точке m равны $a^{(0)}_{m+1},\ \dots,\ a^{(0)}_n$, $a^{(0)}$ и которые удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} da_{m+1} + \frac{\partial V}{\partial a_{m+2}} da_{m+2} + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n + \frac{\partial V}{\partial a} da = 0. \tag{№}$$

Вследствие этого

$$z = V(x_1, x_2,\ \dots,\ x_n,\ a_{m+1},\ a_{m+2},\dots,\ a_n,\ a) \tag{29}$$

решение системы (2).

На решений (29) вследствие условия (№) имеем

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1},\ p_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2},\ \dots,\ p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n},$$

а значит, должно быть

$$\left.\begin{aligned} p_1^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0, \ \ldots, \ p_n^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)_0 \\ z^{(0)} = V\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ \ldots, \ x_n^{(0)}, \ a_{m+1}^{(0)}, \ \ldots, a_n^{(0)}, \ a^{(0)}\right) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Уравнения (30) не зависят от того, как выбраны функции $\vartheta, \vartheta_{m+1}, \ldots, \vartheta_n$ и составленное решение, но вполне определены заданием интегрального элемента.

Пользуясь уравнениями (30), можно, вообще говоря, найти $a_{m+1}^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}, a^{(0)}$; мы говорим „вообще говоря“ потому, что в этих уравнениях $x_1, \ldots, x_n$ имеют частные значения; если бы они оставались произвольными, то искомые числа можно было бы найти наверное.

Найдя $a_{m+1}^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$, ищем $b_{m+1}^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$ по уравнениям (28′) второй строки и подставив все найденное в уравнения (28), составляем искомое многообразие.

Про найденное многообразие условимся говорить, что оно проходит через элемент $M^{(0)}$.

Если чисел $a_{m+1}^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}, a^{(0)}, b_{m+1}^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$ найти *нельзя*, мы будем называть *интегральный элемент* $M^{(0)}$ *особенным*.

Из доказанной теоремы как следствие получаем: если два решения системы (2) имеют общий не особенный интегральный элемент, то они имеют и общее характеристическое многообразие измерения m.

116. Интеграл $M^{(n-m)}$. Следуя параграфу 72 назовем интегралом $M^{(n-m)}$ многообразие $n-m$ измерений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \vartheta_1\ (u_{m+1}, u_{m+2}, \ \ldots, \ u_n) \\ x_2 &= \vartheta_2\ (u_{m+1}, u_{m+2}, \ \ldots, \ u_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \vartheta_n\ (u_{m+1}, u_{m+2}, \ \ldots, \ u_n) \\ z &= \vartheta\ (u_{m+1}, u_{m+2}, \ \ldots, \ u_n) \\ p_1 &= p_1\ (u_{m+1}, u_{m+2}, \ \ldots, \ u_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= p_n\ (u_{m+1}, u_{m+2}, \ \ldots, \ u_n) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

если соблюдены условия: если функции (31) тожественно удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ \ldots, \ \varphi_m = p_m - f_m = 0 \tag{2}$$

и если

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ \ldots \ + p_n dx_n. \tag{25}$$

Про первые $n+1$ равенств (31) мы будем говорить, что они определяют *основание* интеграла $M^{(n-m)}$.

Мы показали в § 72, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зависят от k параметров, то вследствие (25) основание также зависит от k параметров. Говоря об интеграле $M^{(n-m)}$, мы не предполагаем, что основание зависит именно от $n-m$ параметров и не исключаем случая, когда это основание зависит от меньшего числа.

Теорема. *По основанию, вообще говоря, можно найти интеграл* $M^{(n-m)}$.

Для нахождения $M^{(n-m)}$, когда надо основание, надо искать только $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

При доказательстве теоремы мы выделим и рассмотрим отдельно случай, нужный нам при решении задачи Коши, в котором основание зависит от $n-m$ параметров. В этом случае условие (25) дает $n-m$ зависимостей, связывающих искомые элементы:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial u_{m+1}} = p_1 \dfrac{\partial\vartheta_1}{\partial u_{m+1}} + \ldots + p_n \dfrac{\partial\vartheta_n}{\partial u_{m+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial u_n} = p_1 \dfrac{\partial\vartheta_1}{\partial u_n} + \ldots + p_n \dfrac{\partial\vartheta_n}{\partial u_n} \end{array}\right\} \qquad (32)$$

Присоединив к ним m уравнений (2), мы получим n уравнений, из которых, вообще говоря, можно найти все искомые n аргументов.

Когда же основание зависит от k параметров, где $k < n-m$, то в системе (32) всего k уравнений; присоединение к ней m уравнений (2) дает возможность найти только $m+k$ из аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, оставляя $n-m-k$ из них произвольными.

Последнее обстоятельство обнаруживается и в случае, когда $k=n-m$, если якобиан, соответствующий уравнениям (2) и (32), обращается тожественно в нуль.

Оставляя в стороне случай, в котором уравнения (2) и (32) противоречивы или не дают для $p_1, p_2, \ldots, p_n$ голоморфных на основании интеграла (31) решений, мы назовем характеристическими все случаи, в которых из системы уравнений (2) и (32) нельзя найти определенных значений для $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а также случай, когда голоморфные функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ обращают в нуль указанный выше якобиан.

Обобщая данное определение, мы можем называть интегралом $M^{(s)}$ системы (2) совокупность значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

если они образуют многообразие s измерений, удовлетворяют уравнениям (2) и связаны зависимостью

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

117. Задача Коши. Сказанное до сих пор позволяет решить задачу Коши, поставленную в § 107. Соответственно сказанному в прошлом параграфе мы можем поставить ее следующим образом.

Найти то решение системы (2), в котором, если

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \vartheta_1\ (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = \vartheta_m\ (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \end{array}\right\} \tag{33}$$

искомая функция z равна $\vartheta\,(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, или, давая ей более симметричный вид, найти то решение системы (2), которое заключает данное многообразие измерения $n-m$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(0)} = \vartheta_1\ (u_{m+1},\ u_{m+2}, \ldots, u_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(0)} = \vartheta_n\ (u_{m+1}, u_{m+2}, \ \ldots, u_n) \\ z^{(0)} = \vartheta\ \ (u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n) \end{array}\right\} \tag{33'}$$

Для решения задачи поступаем так: ищем по данному основанию (33′) интеграл $M^{(n-m)}$ по правилам прошлого параграфа, т. е. присоединяем к функциям (33) функции $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ тех же параметров $u_{m+1}, \ldots, u_n$, удовлетворяющие уравнениям

$$\left.\begin{array}{c} p_1^{(0)} - (f_1)_0 = 0,\ \ldots,\ p_m^{(0)} - (f_m)_0 = 0 \\ dz^{(0)} = p_1^{(0)}\,dx_1^{(0)} + \ldots + p_n^{(0)}\,dx_n^{(0)} \end{array}\right\} \tag{34}$$

В последних уравнениях знак $(f_i)_0$ обозначает результат замены в f_i всех аргументов соответствующими им аргументами со значком (0):

$$(f_i)_0 = f_i\ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)},\ z^{(0)},\ p_{m+1}^{(0)},\ \ldots,\ p_n^{(0)}).$$

Найдя интеграл $M^{(n-m)}$, ищем характеристическое многообразие A_m, определяя параметры $a_{m+1}, \ldots, a_n,\ a,\ b_{m+1}, \ldots, b_n$ по формулам:

$$\left.\begin{array}{c} z_0 = V\,(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)},\ a_{m+1}^{(0)},\ \ldots,\ a_n^{(0)},\ a^{(0)}), \\ p_{m+1}^{(0)} = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}\right)_0, \ \ldots,\ p_n^{(0)} = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_m}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial a}\right)_0 b_{m+1}^{(0)} + \left(\dfrac{\partial V}{\partial a_{m+1}}\right)_0 = 0,\ \ldots,\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial a}\right)_0 b_n^{(0)} + \left(\dfrac{\partial V}{\partial a_n}\right)_0 = 0. \end{array}\right\} \tag{35}$$

Найдя $a_{m+1}^{(0)},\ \ldots,\ a_n^{(0)}, a^{(0)}, b_{m+1}^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$ в функциях от аргументов $u_{m+1}, \ldots, u_n$, составляем многообразие A_m по формулам:

$$\left.\begin{array}{c} z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ a_{m+1}^{(0)},\ \ldots,\ a_n^{(0)},\ a^{(0)}) \\ \dfrac{\partial V}{\partial a^{(0)}}\ {}_{m+1}^{(0)} + \dfrac{\partial V}{\partial a_{m+1}^{(0)}} = 0,\ \ldots,\ \dfrac{\partial V}{\partial a^{(0)}}\,b_n^{(0)} + \dfrac{\partial V}{\partial a_n^{(0)}} = 0 \end{array}\right\} \tag{36}$$

и исключаем из $n-m+1$ уравнений (36) $n-m$ параметров $u_{m+1}, \ldots, u_n$. Если мы при этих выкладках не натолкнемся при определении $p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}$ на характеристический случай или на случай, когда нельзя найти голоморфных решений для этих аргументов, а также на особенный случай при нахождении $a^{(0)}$, $a_{m+1}^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ $a^{(0)}$, $b_{m+1}^{(0)}, \ldots, b_n^{(0)}$; наконец, если из уравнений (36) второй строки окажется возможным найти параметры $u_{m+1}, \ldots, u_n$, то исключая их из первого уравнения (36), мы получим z как функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая будет искомым решением системы.

Действительно, полученная поверхность, как геометрическое место многообразий (36), заключает основание (33′), так как каждое многообразие (36) в отдельности его заключает; далее многообразие (36) есть характеристическое многообразие A_m.

Вследствие того, что

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \tag{3}$$

полный интеграл системы (2), подстановка $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$, найденных из уравнений (3), (5′), в уравнения (5) обращает их в тожества. Следовательно, из справедливости уравнений (35) средней строки вытекает справедливость тожеств

$$p_1^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0, \ \ldots, \ p_m^{(0)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_m}\right)_0.$$

Продифференцировав первое уравнение (35), на основании этого заключаем, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}\right)_0 da_{m+1}^{(0)} + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial a_n}\right)_0 da_n^{(0)} + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 da^{(0)} = 0.$$

Воспользовавшись уравнениями (35) третьей строки, находим:

$$b_{m+1}^{(0)} da_{m+1}^{(0)} + \ldots + b_n^{(0)} da_n^{(0)} - da^{(0)} = 0,$$

что вследствие вторых уравнений (36) дает

$$\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}^{(0)}} da_{m+1}^{(0)} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n^{(0)}} da_n^{(0)} + \frac{\partial V}{\partial a^{(0)}} da^{(0)} = 0, \tag{№}$$

т. е. указывает, что соблюдено условие (№) § 113.

118. Уравнения для многообразия C_m. Предполагая попрежнему, что мы имеем дело с замкнутой системой, решенной относительно m производных:

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ \varphi_2 = p_2 - f_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_m = p_m - f_m = 0 \tag{2}$$

решим уравнения

$$\left.\begin{aligned} & z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \\ & \frac{\partial V}{\partial a} b_{m+1} + \frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial V}{\partial a} b_n + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

определяющие характеристическое многообразие C_m, и уравнения

$$p_{m+1}=\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \ \ldots, \ p_n=\frac{\partial V}{\partial x_n} \tag{5'}$$

относительно постоянных $a_{m+1}, \ldots, a_n, a, b_{m+1}, \ldots, b_n$.

Положим, что решая первое уравнение (24) и уравнения (5'), мы получим:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n)=a_{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n)=a, \end{array}\right\} \tag{37}$$

и что остальные уравнения (24) дают

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{n+m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n)=b_{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n)=b_n \end{array}\right\} \tag{37'}$$

Функция Φ_{n+j} получается из

$$-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_j}}{\dfrac{\partial V}{\partial a}}$$

исключением $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$ при помощи уравнений (37). Обозначая знаком (F) результат такого исключения из некоторой функции F, мы можем писать:

$$\Phi_{n+j}=-\left(\frac{\partial V}{\partial a_j}\right):\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right).$$

Функция z, данная первым уравнением (24), удовлетворяет каждой паре уравнений

$$\varphi_i=0, \ (i=1, 2, \ldots, m), \ \Phi_j=a_j, \ (j\leqslant n+1). \tag{38}$$

Следовательно, по доказанному в § 101, она удовлетворяет и каждому из уравнений:

$$[\varphi_i, \Phi_j]=\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}+\sum_{k=m+1}^{k=n}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k}\frac{d\varphi_i}{dx_k}\right\}=0,$$

а также каждому из уравнений

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}+f_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}+\sum_{k=m+1}^{k=n}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial _k}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right)-\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k}\frac{d\varphi_i}{dx_k}\right\}=0=$$
$$=\{[\varphi_i, \Phi_j]\}, \tag{39}$$

обозначая знаком $\{\ \}$ результат исключения $p_1, p_2, \ldots, p_m$ при помощи уравнений (2).

Левая часть последнего уравнения зависит, однако, кроме независимых переменных, только от

$$z,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n; \tag{40}$$

последние же аргументы зависят существенно от $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$ и из них эти постоянные исключены быть не могут. Значит, исчезновение этих постоянных из результата замены в (39) z его значением возможно только при условии, что (39) от аргументов (40) вообще не зависит и, следовательно, равна нулю тождественно.

Из сказанного ясно, что функции

$$\Phi_{m+1},\ \ldots,\ \Phi_n,\ \Phi_{n+1} \tag{41}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+f_i\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\sum_{k=m+1}^{k=n}\left\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial p_k}\,\frac{d\varphi_i}{dx_k}\right\}=0,\\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

от $n+(n-m)+1$ независимых переменных

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n.$$

Докажем, что функции

$$\Phi_{n+m+1},\ \ldots,\ \Phi_{2n}$$

также удовлетворяют этой системе.

Положим для упрощения выкладок

$$\Phi_{n+j}=(\psi_{n+j}),\quad \psi_{n+j}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_j}}{\dfrac{\partial V}{\partial a}}$$

и вычислим скобку $[\varphi_i,\ \Phi_{n+j}]$.

Пользуясь свойствами скобок Якоби, получаем

$$[\varphi_i,\ \Phi_{n+j}]=([\varphi_i,\ \psi_{n+j}])+\sum_{j=m+1}^{j=n+1}\left(\frac{\partial\psi_{n+j}}{\partial a_j}\right)[\varphi_i,\ \Phi_j],\quad a_{n+1}=a$$

и, так как по доказанному

$$\{[\varphi_i,\ \Phi_j]\}\equiv 0,$$

окончательно:

$$\{[\varphi_i,\ \Phi_{n+j}]\}=\{([\varphi_i,\ \psi_{n+j}])\}.$$

Но

$$[\varphi_i, \psi_{n+j}] = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_{n+j}}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial x_k} \right) \frac{\partial V}{\partial a_j} - \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial x_k} \right) \frac{\partial V}{\partial a} \right\}$$

Заменив в $\varphi_i = 0$ неизвестное z через V, мы получим тожество. Дифференцируя это тожество, находим

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial a} \equiv 0, \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial a_j} \equiv 0,$$

понимая под $z, p_1, \ldots, p_n$ функцию V и ее производные; значит при таком понимании аргументов $z, p_1, \ldots, p_n$:

$$[\varphi_i, \psi_{n+j}] = 0.$$

Исключение из $\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$, V аргументов $a_{m+1}, \ldots, a_n$, a, однако, восстанавливает $p_{m+1}, \ldots, p_n$, z и обращает $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_m}$ в $f_1, \ldots, f_m$, давая выражения производных $p_1, \ldots, p_m$ через z, $p_{m+1}, \ldots, p_n$. Значит

$$([\varphi_i, \psi_{n+j}]) = \{ ([\varphi_i, \psi_{n+j}]) \} = 0$$

и так как из аргументов (40) исключить $a_{m+1}, \ldots, a_n$, a нельзя, то последнее выражение равно нулю тожественно.

Следовательно

$$\{ [\varphi_i, \Phi_{n+j}] \} \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Система (42) должна быть замкнутой. Если бы она не была замкнутой, то она допускала бы менее $2(n-m)+1$ алгебраически независимых решений, тогда как нами установлено, что ей удовлетворяют $2(n-m)+1$ алгебраически независимых функций (37) и (37′).

Алгебраическая независимость функции (37), (37′) установлена нами в примечании § 114. Если бы они были связаны зависимостями, то можно было бы установить равенство вида

$$\omega(b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n, a_{m+1}, \ldots a_n, a) = 0,$$

что, по доказанному в том параграфе, невозможно.

Будучи нормальной, система (42) якобиева.

Вспоминая сказанное в § 49 и 50, мы видим, что интегрирование системы (42) равносильно интегрированию системы в полных дифференциалах:

$$
\left.\begin{aligned}
dz &= \sum_{i=1}^{i=m}\left(f_i + \sum_{k=m+1}^{k=n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}p_k\right)dx_i\\
dx_k &= \sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}dx_i \qquad\qquad (k=m+1,\ldots,n)\\
dp_k &= -\sum_{i=1}^{i=m}\frac{d\varphi_i}{dx_k}dx_i.
\end{aligned}\right\} \qquad (43)
$$

Равенства (37), (37') не что иное, как интегралы системы в полных дифференциалах (43).

Из сказанного ясно, что нахождение характеристических многообразий C_m нами сведено к интегрированию системы (43) в полных дифференциалах. Систему (43) можно назвать системой уравнений, определяющих характеристическое многообразие C_m.

Таким образом высказанное нами в § 114 утверждение о независимости многообразия C_m от выбранного полного интеграла можно считать установленным.

Отметим, что в частном случае $m=1$ система (43) обращается в

$$
\left.\begin{aligned}
dz &= \left(f + \sum_{k=2}^{k=n}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}p_k\right)dx_1\\
dx_k &= \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}dx_1, dp_k = -\frac{d\varphi}{dx_k}dx_1, \ (k=2, 3, \ldots, n)
\end{aligned}\right\} \qquad (43_1)
$$

и, значит, не отлична от системы

$$
\frac{dx_1}{1} = \ldots = \frac{dx_k}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}} = \ldots = -\frac{dp_k}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = \ldots = \frac{dz}{f+\sum\limits_{k=2}^{k=n}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}p_k}
$$

$$\varphi = p_1 - f = 0,$$

определяющей характеристические линии уравнения

$$\varphi = p_1 - f = 0.$$

В заключение подчеркнем еще раз, что решения системы в полных дифференциалах (43) находятся из уравнений (37) и (37') решением их относительно неизвестных системы. Так как уравнения (37) и (37') можно считать найденными, как только составлены уравнения (24), т. е. как только найден полный интеграл системы (2), то можно считать систему (43) полностью проинтегрированной, как только найден полный интеграл системы (2).

Это замечание имеет некоторое значение при приложении метод, основанных на интегрировании системы (43), изложению которых будут посвящены следующие ближайшие параграфы.

119. Обобщение методы Коши на случай системы. Подобно тому, как интегрирование системы (43_1) привело нас в главе седьмой к решению задачи Коши в случае одного уравнения, интегрирование системы (43) может привести к решению этой задачи в случае системы.

Вспомним процесс, описанный в § 117. Применяя этот процесс, надо прежде всего по данному основанию (33') составить интеграл $M^{(n-m)}$. Этот интеграл можно составить, если мы не натолкнемся на характеристический случай; в последнем случае вместо интеграла $M^{(n-m)}$ может обнаружиться интеграл $M^{(s)}, s>n-m$. Найдя $M^{(n-m)}$, мы должны искать значения $a^{(0)}_{m+1}, \ldots, a^{(0)}_n, a^{(0)}, b^{(0)}_{m+1}, \ldots, b^{(0)}_n$ как функций от параметров $u_{m+1}, \ldots, u_n$, через которые выражены элементы данного нам основания. Для этого надо пользоваться уравнениями (35), которые получаются из уравнений (24) и (5') прошлого параграфа заменою в них всех аргументов соответствующими аргументами со значком (0). Так как уравнения (37) и (37') простое преобразование уравнений (24) и (5'), можно получить уравнения, равносильные уравнениям (35), выполняя в уравнениях (37) и (37') указанную замену всех аргументов соответствующими аргументами со значком (0).

Следовательно, мы получаем найденные в § 117 $a^{(0)}_{m+1}, \ldots, a^{(0)}_n$, $a^{(0)}, b^{(0)}_{m+1}, \ldots, b^{(0)}_n$, вычисляя их по формулам:

$$\left.\begin{array}{l}
\Phi_{m+1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right)=a_{m+1}^{(0)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_n\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right)=a_n^{(0)} \\
\Phi_{n+1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right)=a^{(0)} \\
\Phi_{n+m+1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right)=b_{m+1}^{(0)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_{2n}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right)=b_n^{(0)};
\end{array}\right\} \quad (44)$$

особенный случай обнаруживается, когда левые части некоторых уравнений (37), (37') перестают быть определенными или конечными после указанной подстановки.

После нахождения указанных аргументов, мы должны подставлять их в уравнения (24); но уравнения, равносильные (24), мы получаем из (37) и (37'), исключая из них $p_{m+1}, \ldots, p_n$, так как эти уравнения получены из (24) присоединением к ним уравнений (5′). Следовательно, мы можем получить уравнения, равносильные (36), из уравнений (37) и (37′), выполняя в них замену параметров $a_{m+1}, \ldots, a_n, a, b_{m+1}, \ldots, b_n$ найденными их значениями $a^{(0)}_{m+1}, \ldots, a^{(0)}_n, a^{(0)}, b^{(0)}_{m+1}, \ldots, b^{(0)}_n$ и исключением $p_{m+1}, \ldots, p_n$.

Значит, уравнения, равносильные (36), получаются из

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \\
&= \Phi_{m+1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \\
&= \Phi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \\
&\Phi_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \\
&= \Phi_{n+1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \\
&\Phi_{n+m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \\
&= \Phi_{n+m+1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots p_n^{(0)}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\Phi_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \\
&= \Phi_{2n}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}),
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

исключением $p_{m+1}, \ldots, p_n$. Так как в функциях Φ_s мы имеем собрание алгебраически независимых решений системы (42), уравнения (45) могут быть решены относительно $x_{m+1}, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n$ и приводят к равенствам вида:

$$\left.\begin{aligned}
&x_i = \omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots p_n^{(0)}), \\
&\qquad (i = m+1, \ldots, n) \\
&z = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) \\
&p_i = \theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z^{(0)}, p_{m+1}^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}), \\
&\qquad (i = m+1, \ldots, n).
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Эти равенства можно было бы получить, интегрируя непосредственно систему (43) методой Коши по правилам § 54.

Первые $n-m+1$ уравнения системы (46) дают требуемый результат исключения $p_{m+1}, \ldots, p_n$ из уравнений (45).

Для окончательного составления решения, остается найти z как функцию от $x_1, \ldots, x_n$ исключая параметры $u_{m+1}, \ldots, u_n$ из первых $n-m+1$ уравнений (46). Последнее возможно только в том случае, если из первых $n-m$ уравнений (46) эти параметры могут быть найдены, когда последнее невозможно, указанные параметры из первых $n-m$ уравнений (46) могут быть исключены, и мы получаем зависимость, связывающую одни независимые переменные. Если это обстоятельство не обнаруживается, z искомое решение, что вытекает из сказанного в § 117.

Мы дадим еще одно доказательство, установив более общее предложение.

Теорема. *Если собрание*

$$M\,(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}\ z^{(0)},\ p_1^{(0)},\ \ldots,\ p_n^{(0)}), \tag{47}$$

есть некоторый интеграл системы (2), *то собрание уравнений* (45) *вместе с данными уравнениями системы*

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0,\ \ldots,\ \varphi_m = p_m - f_m = 0 \tag{2}$$

определяют интеграл этой системы.

Приступая к доказательству теоремы мы можем считать, не нарушая общности, что в интеграле (47) $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ постоянные.

Действительно, дав основанию вид

$x_1 = \vartheta_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_m = \vartheta_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), z = \vartheta(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, мы можем $x_1 - \vartheta_1,\ x_2 - \vartheta_2, \ldots,\ x_m - \vartheta_m$ взять за переменные независимые. Замена переменных в уравнениях (45) и (2) меняет их в уравнения, соответствующие преобразованной системе.

Для доказательства теоремы, вследствие соблюдения равенств (2), достаточно доказать, что

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n dx_n, \tag{48}$$

когда в последнем равенстве аргументы трактуются как функции от $x_1, \ldots, x_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$ или других возможных параметров интеграла (47).

Доказываемая теорема аналогична теореме § 95 и будет нами доказана по схеме того же параграфа.

Условимся обозначать знаком d дифференциалы, взятые в предположении, что меняются только $x_1, \ldots, x_m$; знаком δ дифференциалы взятые в предположении, что меняются только параметры данного интеграла и знаком Δ — дифференциалы, взятые в предположении, что имеются все параметры в (46). При этих обозначениях равенству (48) надо дать вид:

$$\Delta z = p_1\,\Delta x_1 + p_2\,\Delta x_2 + \ldots + p_n\,\Delta x_n; \tag{48'}$$

дифференциалы d как раз те дифференциалы, которые встречаются в системе (43) и

$$\Delta = d + \delta.$$

Заменяя на основании уравнений (2) в уравнениях (43) первой строки f_i на p_i, умножая уравнения второй строки на p_k и вычитая из уравнения первой строки, получаем:

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n. \tag{49}$$

Нам остается доказать равенство

$$\delta z = p_{m+1}\,\delta x_{m+1} + p_{m+2}\,\delta x_{m+2} + \ldots + p_n\,\delta x_n.$$

Положим

$$U = \delta z - p_{m+1}\,\delta x_{m+1} - \ldots - p_n\,\delta x_n. \tag{50}$$

Дифференцируя (50) и (49), получаем:

$$dU = \delta\,dz - p_{m+1}\,\delta\,dx_{m+1} - \ldots - p_n\,\delta\,dx_n - dp_{m+1}\,\delta x_{m+1} - \ldots - dp_n\,\delta x_n$$

$$\delta\,dz = p_{m+1}\,\delta\,dx_{m+1} + \ldots + p_n\,\delta\,dx_n + \delta p_1 dx_1 + \ldots + \delta p_n dx_n.$$

Складывая находим:

$$dU = \sum_{i=1}^{i=m} \delta p_i\,dx_i + \sum_{k=m+1}^{k=n} \delta p_k \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k}\,dx_i + \sum_{k=m+1}^{k=n} \delta x_k \sum_{i=1}^{i=m} \frac{d\varphi_i}{dx_k}\,dx_i =$$

$$= -U \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\,dx_i,$$

так как в силу уравнений (2):

$$\delta\varphi_i = \delta p_i + \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\,\delta x_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\,\delta z + \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k}\,\delta p_k$$

$$= \delta p_i + \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{d\varphi_i}{dx_k}\,\delta x_k + \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k}\,\delta p_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\,U = 0.$$

Из полученного равенства вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\,dx_i \tag{51}$$

полный дифференциал; последнее нетрудно проверить непосредственно составляя скобки $[\varphi_i, \varphi_j]$, использовав замкнутость системы и продифференцировав полученные равенства по z. Далее оно дает

$$U = U_0 e^{-V}$$

где V функция, которая обращается в нуль, когда

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_m = x_m^{(0)}$$

и дифференциал которой равен (51). Вследствие этого

$$U_0 = \delta z^{(0)} - p_{m+1}^{(0)}\,\delta x_{m+1}^{(0)} - \ldots - p_n^{(0)}\,\delta x_n^{(0)}$$

и, значит, равно нулю, так как (47) интеграл. Значит $U = 0$, что и требовалось доказать.

Из доказанного вытекает, что, если нахождение параметров $u_{m+1}, \ldots, u_n$ возможно, основание (46) имеет измерение n; z функция от $x_1, \ldots, x_n$ и $p_1, \ldots, p_n$ ее производные.

Но из доказанного также вытекает, что мы не получим определенного решения задачи Коши только в том случае, когда число параметров, включая и $x_1, x_2, \ldots, x_m$, от которых зависят первые $n-m$ равенств (46), менее n.

В этом случае мы получим интеграл $M^{(s)}$, где $n-m \leqslant s \leqslant n$; измерение интеграла не может быть менее $n-m$, так как его основание должно содержать многообразие измерения $n-m$.

Так как цель этого параграфа состояла лишь в указании на то, что метода Коши непосредственно обобщается на случай системы, мы не будем останавливаться на разборе исключенных случаев, представляющемся довольно кропотливым. Мы ограничимся указанием, что сказанного в главе седьмой в связи с методой, указанной в § 107, достаточно, чтобы разобраться в любом случае; конечно, применение методы § 107 требует предварительного приведения основания к виду:

$$x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_m=0,\ z=\vartheta\ (x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

что достигается изменением независимых переменных.

Когда известно собрание интегралов системы (43), нужное преобразование переменных можно выполнять в указанном собрании. Собрание интегралов системы (43) известно, как только найдем полный интеграл системы (2).

120. Примеры. 1) Рассмотрим пример § 109, дав ему вид

$$p_1-\frac{x_1x_3}{p_3}=0,\quad p_2-\frac{x_2x_4}{p_4}=0. \tag{52}$$

Уравнения, дающие характеристическое многообразие C_2 системы (52):

$$\left.\begin{aligned} &dx_3=\frac{x_1x_3}{p_3^2}\,dx_1,\quad dx_4=\frac{x_2x_4}{p_4^2}\,dx_2,\quad dz=\frac{2x_1x_3}{p_3}\,dx_1+\frac{2x_2x_4}{p_4}\,dx_2\\ &\qquad dp_3=\frac{x_1}{p_3}\,dx_1,\quad dp_4=\frac{x_2}{p_4}\,dx_2.\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Интегрируя систему (53), без труда получаем:

$$\left.\begin{aligned} &x_3=\frac{x_3^{(0)}}{p_3^{(0)}}\sqrt{x_1{}^2+p_3^{(0)2}-x_1^{(0)2}},\quad x_4=\frac{x_4^{(0)}}{p_4^{(0)}}\sqrt{x_2{}^2+p_4^{(0)2}-x_2^{(0)2}}\\ &p_3=\sqrt{x_1{}^2+p_3^{(0)2}-x_1^{(0)2}},\quad p_4=\sqrt{x_2{}^2+p_4^{(0)2}-x_4^{(0)2}}\\ &z=\frac{x_1^2\,x_3^{(0)}}{p_3^{(0)}}+\frac{x_2^2\,x_4^{(0)}}{p_4^{(0)}}+z^{(0)}-\frac{x_1^{(0)2}\,x_3^{(0)}}{p_3^{(0)}}-\frac{x_2^{(0)2}\,x_4^{(0)}}{p_4^{(0)}}\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Предложим себе найти решение, в котором при

$$x_1=0,\ x_2=1:\ z=x_3{}^2+x_4.$$

Отыскивая интеграл $M^{(2)}$, полагаем

$$x_1^{(0)}=0,\quad x_2^{(0)}=1,\quad x_3^{(0)}=u,\quad x_4^{(0)}=v,\quad z^{(0)}=u^2+v$$

и

$$2u\,du + dv = p_3^{(0)}\,du + p_4^{(0)}dv,$$

откуда

$$p_3^{(0)} = 2u,\ p_4^{(0)} = 1,\ p_1^{(0)} = 1,\ p_2^{(0)} = v.$$

Подставляя найденные значения в (54), находим

$$x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + 4u^2},\ x_4 = vx_2,\ \ z = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 v + u^2,$$

откуда

$$z = \frac{1}{4}x_1^2 + x_3^2 + x_2 x_4.$$

2) Предложим себе найти решение системы (52), заключающее многообразие

$$x_1 = x_3,\ x_2 = 1,\ z = x_3^2 + x_4.$$

Отыскивая интеграл $M^{(2)}$, полагаем

$$x_1^{(0)} = u,\quad x_2^{(0)} = 1,\quad x_3^{(0)} = u,\quad x_4^{(0)} = v,\quad z^{(0)} = u^2 + v.$$

Уравнения

$$2u\,du + dv = p_1^{(0)}du + p_3^{(0)}\,du + p_4^{(0)}dv,\ p_1^{(0)}p_3^{(0)} = u^2,\ p_2^{(0)}\,p_4^{(0)} = v$$

дают

$$p_4^{(0)} = 1,\ \ p_2^{(0)} = v,\ \ p_1^{(0)} + p_3^{(0)} = 2u,\ p_1^{(0)}\,p_3^{(0)} = u^2,\ p_1^{(0)} = p_3^{(0)} = u.$$

Мы имеем дело с характеристическим случаем, так как якобиан

$$\begin{vmatrix} p_3^{(0)}, & 0, & p_1^{(0)}, & 0 \\ 0, & p_4^{(0)}, & 0, & p_2^{(0)} \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & 0 \end{vmatrix}$$

упомянутый нами в § 116, не будучи равным нулю тожественно, обращается в нуль на найденном интеграле. Многообразие $M^{(2)}$ однако не есть геометрическое место характеристических многообразий. Поверка даст немедленно, что второе из уравнений (53) не удовлетворено.

Заменяя в (54) начальные значения элементами интеграла $M^{(2)}$ получим

$$x_3 = x_1,\ x_4 = x_2\,v,\ z = x_1^2 + x_2^2\,v,\ p_3 = x_1,\ p_4 = x_2.$$

Мы не получили решения, но только интеграл $M^{(3)}$; основание этого интеграла геометрическое место характеристических многообразий. Сразу ясно, что условиям задачи удовлетворяют, между прочим, функции

$$z = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_3^2) + x_2\,x_4,\quad z = x_1\,x_3 + x_2\,x_4.$$

Этот пример показывает, что в случае системы исключенный случай может обнаруживаться и тогда, когда данное основание не есть геометрическое место характеристических многообразий. Чтобы найти все решения задачи, можно было, работая в духе § 107, свести задачу к нахождению решения уравнения

$$p_1 p_3 - x_1 x_3 = 0,$$

удовлетворяющего условиям:

$$\text{если } x_1 = x_3, \text{ то } z = x_3^2 + x_2 x_4.$$

К решению этой задачи применимо все сказанное в § 97.

121. Обобщение первой методы Якоби на случай системы. Подобно тому, как в § 119 нами распространена на случай системы (2) метода главы седьмой, можно распространить на случай системы и методу главы шестой. Положим, что уравнения системы (2) не зависят явно от неизвестной функции z.

Такое предположение было сделано в главе шестой о тех уравнениях, к которым там прилагалась метода.

Если уравнения системы (2) имеют вид

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0,\ \varphi_2 = p_2 - f_2 = 0, \ldots, \varphi_m = p_m - f_m = 0, \tag{2'}$$

где функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ от z не зависят, то и уравнения (24) имеют более простой вид. Именно, одно из постоянных $a_{m+1}, \ldots, a_n$, a входит в выражение z аддитивно. Вследствие этого уравнения (24) можно заменить через

$$\left.\begin{aligned} z &= V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n) - a \\ b_{m+1} &= \frac{\partial V}{\partial a_{m+1}}, \ldots, b_n = \frac{\partial V}{\partial a_n} \end{aligned}\right\} \tag{24'}$$

В системе уравнений (37) и (37′) первые и последние $n-m$ уравнений, как полученные решением уравнений (24′) второй строки и уравнений (5′), не зависят от z; от z зависит только среднее уравнение, решенное относительно a. Система (37) и (37′) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) &= a_{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) &= a_n \\ \Phi_{n+m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) &= b_{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p\ \ ) &= b\ \\ \Phi_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) &= a \end{aligned}\right\} \tag{37$_1$}$$

В этой системе каждая из первых $2(n-m)$ функций Φ удовлетворяет системе уравнений

$$(\varphi_i, \Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m \quad (42_1)$$

Последняя Φ_{n+1} удовлетворяет системе уравнений

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} + f_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{k=n} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right\} = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m. \end{array} \right\} \quad (42_1')$$

Для нахождения z и остальных аргументов мы имеем систему в полных дифференциалах

$$dz = \sum_{i=1}^{i=m} \left\{ f_i + \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} p_k \right\} dx_i \quad (43')$$

$$\left. \begin{aligned} dx_k &= \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} dx_i \\ dp_k &= - \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_i \end{aligned} \right\} \quad (43_1')$$

Замкнутость системы $(42_1')$ была установлена в § 118; замкнутость системы (42_1) вытекает непосредственно из того, что она имеет $2(n-m)$ алгебраически независимых решений.

Система уравнений $(43_1')$ может быть проинтегрирована независимо от уравнения (43'). Положим, что интегрированием ее найдены интегралы

$$\left. \begin{aligned} &\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \\ &= \psi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, b_{m+1}, \ldots, b_n, a_{m+1}, \ldots, a_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_{2(n-m)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = \\ &= \psi_{2(n-m)}(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_m^{(0)}, b_{m+1}, \ldots, b_n, a_{m+1}, \ldots, a_n) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

которые нами сразу написаны в виде, удобном для преобразования в интегралы Коши, причем буквами $b_{m+1}, \ldots, b_n$ нами обозначены начальные значения аргументов $x_{m+1}, \ldots, x_n$, а буквами $a_{m+1}, \ldots, a_n$ начальные значения аргументов $p_{m+1}, \ldots, p_n$.

Взяв при интегрировании системы из уравнений (43') и $(43_1')$ за новые неизвестные функции $a_{m+1}, \ldots, a_n$, $b_{m+1}, \ldots, b_n$, левые части интегралов Коши системы ($43_1'$), мы обратим систему ($43_1'$) в систему

$$da_k = 0, \quad db_k = 0, \quad k = m+1, \ldots, n;$$

в уравнении ($43'$) правая часть обратится в функцию от a_k, b_k, и $x_1, \ldots, x_m$, которая, вследствие интегрируемости системы из уравнений ($43_1'$) и ($43'$) будет полным дифференциалом при постоянных a_k и b_k.

Ищем то решение преобразованного уравнения ($43'$), в котором при

$$x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, \; x_m = x_m^{(0)}: \; z = a_{m+1} b_{m+1} + \ldots + a_n b_n - a.$$

Так как правая часть уравнения не зависит от z, мы найдем это решение простыми квадратурами и будем иметь

$$z = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \left(f_1 - \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial f_1}{\partial p_k} p_k \right) dx_1 + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \left(f_2 - \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial f_2}{\partial p_k} p_k \right)_1 dx_2 + \ldots +$$

$$+ \int_{x_m^{(0)}}^{x_m} \left(f_m - \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial f_m}{\partial p_k} p_k \right)_{m-1} dx_m + a_{m+1} b_{m+1} + \ldots + a_n b_n - a; \qquad (56)$$

здесь знаком $(f)_s$ обозначен результат замены в функции f от $x_1, \ldots, x_m$, a_k и b_k аргументов $x_1, \ldots, x_s$ их начальными значениями.

Выражая в полученном $b_{m+1}, \ldots, b_n$ через $x_1, \ldots, x_n$, $a_{m+1}, \ldots, a_n$ при помощи уравнений (55), мы получим решение системы ($2'$), зависящее от $n - m + 1$ произвольных постоянных.

Найденная функция z действительно решение системы; оно — то, которое получается из последнего уравнения (37_1) подобающим выбором правой части, исключением параметров b и аргументов $p_{m+1}, \ldots, p_n$ при помощи первых $n - m$ уравнений (37_1), если считать их полученными из (55) решением относительно a_i и b_i.

Это решение после замены $x_1, \ldots, x_m$ их начальными значениями обращается в

$$a_{m+1} x_{m+1} + \ldots + a_n x_n - a,$$

т. е. наверное полный интеграл системы (2), как показано в § 111.

При $m = 1$, уравнения ($43_1'$) обращаются в

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx_1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

а уравнение (56) в уравнение

$$z = a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n - a + \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \left(f - \sum_{k=2}^{k=m} \frac{\partial f}{\partial p_k} p_k \right) dx_1.$$

Замечая, что в этом случае уравнение, подлежащее интегрированию, имеет вид

$$p_1 - f = 0,$$

убеждаемся, что полученное нами правило тожественно с правилом главы шестой при $H = -f$.

122. Обобщенная теорема Якоби. *Положим, что система*

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ldots, \varphi_m = p_m - f_m = 0 \tag{2}$$

замкнута и что уравнения

$$\left.\begin{aligned} &z = V(x_1, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \\ &\frac{\partial V}{\partial a} b_{m+1} + \frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a} b_n + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

определяют ее характеристическое многообразие C_m.

Присоединяем к уравнениям (24) *уравнения*

$$p_{m+1} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \ldots, p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}. \tag{5'}$$

Решая первое уравнение (24) *и уравнение* (5'), *находим*

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = a_{m+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = a_n \\ &\Phi_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = a. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Обозначая знаком (f) *результат исключения из функции f от a_m $, \ldots, a_n$, a этих аргументов при помощи формул* (37), *полагаем*

$$\Phi_{n+j} = -\left(\frac{\partial V}{\partial a_j}\right) : \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \tag{57}$$

и присоединяем к уравнениям (37) *уравнения*

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{n+m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = b_{m+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = b_n. \end{aligned}\right\} \tag{37'}$$

Справедливы тожества

$$\left.\begin{aligned} &[\Phi_i, \Phi_j] \equiv 0, \ [\Phi_{n+1}, \Phi_j] \equiv 0, \ [\Phi_i, \Phi_{n+j}] \equiv 0, \ (i \neq j), \\ &[\Phi_i, \Phi_{n+i}] \equiv -\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)}, \\ &[\Phi_{n+1}, \Phi_{n+i}] \equiv -\frac{\Phi_{n+i}}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)}, \ [\Phi_{n+i}, \Phi_{n+j}] \equiv 0 \\ &(i = m+1, \ldots, n, \ j = m+1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Приступая к доказательству теоремы, напомним прежде всего, что равенства (37) и (37′) образуют интегралы системы

$$\left.\begin{aligned} dz &= \sum_{i=1}^{i=m}\left(f_i + \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} p_k\right) dx_i \\ dx_k &= \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k} dx_k \\ dp_k &= -\sum_{i=1}^{i=m} \frac{d\varphi_i}{dx_k} dx_k \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Для доказательства первых двух групп тожеств (58) замечаем, что z, данное первым равенством (24), удовлетворяет каждому из уравнений (5′), а значит, и каждому из уравнений (37).

Значит z удовлетворяет и каждому из уравнений

$$[\Phi_i, \Phi_j] = 0,\ [\Phi_{n+1}, \Phi_j] = 0, i = m+1, \ldots, n, j = m+1, \ldots, n. \tag{59}$$

Но левые части этих уравнений не зависят явно от $a_{m+1}, \ldots, a_n$, а от $p_1, \ldots, p_m$ они также не зависят; из $p_{m+1}, \ldots, p_n$, z эти параметры исключены быть не могут. Следовательно, каждое из равенств (59) простое тожество.

Переходя к остальным тожествам, обозначим временно отношение

$$-\frac{\partial V}{\partial a_j} : \frac{\partial V}{\partial a}$$

через $\overline{\Phi_{n+j}}$, заменяя равенство (57) через

$$\Phi_{n+j} = (\overline{\Phi_{n+j}}).$$

Занимаемся следующими тремя тожествами (58). Имеем на основании (59)

$$[\Phi_h, \Phi_{n+j}] \equiv \left(\frac{\partial \overline{\Phi_{n+j}}}{\partial a_{m+1}}\right)[\Phi_h, \Phi_{m+1}] + \ldots + \left(\frac{\partial \overline{\Phi_{n+j}}}{\partial a_n}\right)[\Phi_h, \Phi_n] +$$

$$+ \left(\frac{\partial \overline{\Phi_{n+j}}}{\partial a}\right)[\Phi_h, \Phi_{n+1}] + ([\Phi_h, \overline{\Phi_{n+j}}]) = ([\Phi_h, \overline{\Phi_{n+j}}]). \tag{60}$$

Значит

$$[\Phi_h, \Phi_{n+j}] \equiv \frac{\partial \Phi_h}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+j}}{\partial x_{m+1}}\right) + \ldots + \frac{\partial \Phi_h}{\partial p_n}\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+j}}{\partial x_n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial x_{m+1}} + \ldots + \frac{\partial \Phi_h}{\partial p_n} \frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial x_n}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial V}{\partial a_j}\right)\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x_{m+1}} + \ldots + \frac{\partial \Phi_h}{\partial p_n} \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x_n}\right)\right\}. \tag{60'}$$

Обозначая временно через $\overline{\overline{f}}$ результат замены в функции f от аргументов $p_{m+1},\ldots,p_n$, z этих аргументов их значениями (5′) и V, имеем

$$\frac{\partial a_h}{\partial a_j}\equiv\overline{\overline{\frac{\partial\Phi_h}{\partial p_{m+1}}}}\,\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\,\partial x_{m+1}}+\ldots+\overline{\overline{\frac{\partial\Phi_h}{\partial p_n}}}\,\frac{\partial^2 V}{\partial a_j\,\partial x_n}+\overline{\overline{\frac{\partial\Phi_h}{\partial z}}}\,\frac{\partial V}{\partial a_j}.$$

Вследствие этого из (60′) получим

$$\overline{\overline{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2[\Phi_h,\ \Phi_{n+j}]}}\equiv-\left\{\frac{\partial V}{\partial a}\,\frac{\partial a_h}{\partial a_j}-\frac{\partial V}{\partial a_j}\,\frac{\partial a_h}{\partial a}\right\}\qquad(61)$$

и так как

$$\frac{\partial a_h}{\partial a_j},\quad\frac{\partial a_h}{\partial a}$$

от $a_{m+1},\ldots,a_n$, a не зависят, из (61) находим, снова исключая $a_{m+1},\ldots,a_n$, a, что

$$[\Phi_h,\ \Phi_{n+j}]\equiv-\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\frac{\partial a_h}{\partial a_j}-\left(\frac{\partial V}{\partial a_j}\right)\frac{\partial a_h}{\partial a}\right\}.\qquad(62)$$

Положив $h=i$, $j\neq i$, из (62) получаем

$$[\Phi_i,\ \Phi_{n+j}]\equiv0;\qquad(58_3)$$

положив $h=i$, $j=i$, из (62) получаем

$$[\Phi_i,\ \Phi_{n+i}]\equiv-\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)};\qquad(58_4)$$

положив $h=n+1$, из (62) получаем, заменяя a_k через a и пользуясь (57):

$$[\Phi_{n+1},\ \Phi_{n+j}]\equiv-\frac{\Phi_{n+j}}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)}.\qquad(58_5)$$

Остается последняя группа тожеств (58). Имеем на основании уже установленных

$$[\Phi_{n+i},\ \Phi_{n+j}]=\left(\frac{\partial\overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a_{m+1}}\right)[\Phi_{n+i},\ \Phi_{n+1}]+\ldots+$$

$$+\left(\frac{\partial\overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a_n}\right)[\Phi_{n+i},\ \Phi_n]+\left(\frac{\partial\overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a}\right)[\Phi_{n+i},\ \Phi_{m+1}]+([\Phi_{n+i},\ \overline{\Phi}_{n+j}])=$$

$$=([\Phi_{n+i},\ \overline{\Phi}_{n+j}])+\left(\frac{\partial\overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a_i}\right)\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)}+\left(\frac{\partial\overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a}\right)\frac{\Phi_{n+i}}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)}.\qquad(63)$$

Далее, на основании (62) и (60),

$$([\Phi_{n+i}, \overline{\Phi}_{n+j}]) = \left(\frac{\partial \Phi_{n+i}}{\partial a_{m+1}}\right)([\Phi_{m+1}, \overline{\Phi}_{n+j}]) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a_n}\right)([\Phi_n, \overline{\Phi}_{n+j}]) + \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a}\right)([\Phi_{n+1}, \overline{\Phi}_{n+j}]) +$$

$$+([\overline{\Phi}_{n+i}, \overline{\Phi}_{n+j}]) = \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a_{m+1}}\right)[\Phi_{m+1}, \Phi_{n+j}] + \ldots +$$

$$+\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a_n}\right)[\Phi_n, \Phi_{m+1j}] + \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a}\right)[\Phi_{n+1}, \Phi_{n+j}] =$$

$$= -\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a_j}\right)\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)} - \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a}\right)\frac{\Phi_{n+j}}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)}.$$

Значит окончательно

$$[\Phi_{n+i}, \Phi_{n+j}] = \left\{-\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a_j}\right) + \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a_i}\right) - \Phi_{n+j}\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a}\right) + \right.$$

$$\left. + \Phi_{n+i}\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a}\right)\right\} : \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right). \qquad (64)$$

Но

$$-\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a_j}\right) + \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a_i}\right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j}\frac{\partial V}{\partial a} - \frac{\partial V}{\partial a_i}\frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial a} - \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j}\frac{\partial V}{\partial a} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial a_i}\right) : \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 = \left(-\frac{\partial V}{\partial a_i}\frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial a} + \frac{\partial V}{\partial a_j}\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial a_i}\right) : \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2$$

$$-\Phi_{n+j}\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+i}}{\partial a}\right) + \Phi_{n+i}\left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{n+j}}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial a_j}\left\{-\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a}\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial a_i}\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial V}{\partial a_i}\left\{-\frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial a}\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial a_j}\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\right\}\right) : \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^3 =$$

$$= \left(-\frac{\partial V}{\partial a_j}\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a} + \frac{\partial V}{\partial a_i}\frac{\partial^2 V}{\partial a_j \partial a}\right) : \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2.$$

Вследствие этого

$$[\Phi_{n+i}, \Phi_{n+j}] \equiv 0,$$

что и оставалось доказать.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

ВТОРАЯ МЕТОДА ЯКОБИ.

123. Системы в инволюции. Положим, что дана замкнутая система уравнений

$$\left.\begin{array}{r} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Интегрированием такой системы может быть заменено, как указано в § 110, интегрирование всякой замкнутой системы путем причисления неизвестной функции к числу независимых переменных. Условимся с самого начала считать, что якобиан

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(p_1, \ldots p_m)} \tag{2}$$

не равен нулю на основании уравнений (1) и что, следовательно, из уравнений (1) можно найти $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Из данной замкнутости системы (1) вытекает, что уравнения

$$(F_i, F_k) = 0$$

следствия уравнений системы.

Мы подчиним нашу систему (1) более строгому ограничению: мы положим, что каждая скобка (F_i, F_h) равна нулю тожественно, т. е., что

$$(F_i, F_h) \equiv 0. \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

Если соблюдены условия (3), мы будем говорить, что функции

$$F_1, F_2, \ldots, F_m \tag{4}$$

находятся в инволюции, а также, что *система* (1) *в инволюции*. Введенный термин мы распространим на функции, зависящие явно от неизвестной z, говоря, что две функции F_i и F_h находятся в инволюции, если тожественно

$$[F_i, F_h] \equiv 0. \tag{3'}$$

Всякая замкнутая система из m уравнений, не зависящих явно от неизвестной функции, может быть переделана в систему, находящуюся в инволюции. Для этого достаточно решить ее относительно m производных и заменить нормальной и эквивалентной ей системой:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m = p_m - f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Это утверждение было установлено в § 26 для случая линейных систем, но оно, очевидно, остается справедливым и для рассматриваемого случая. Доказательство основано на том, что скобка

$$(\varphi_i, \varphi_h) = \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{k=n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_h}{\partial p_k} \right)$$

не зависит от $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и потому должна быть тожественно равна нулю, если уравнение

$$(\varphi_i, \varphi_h) = 0$$

есть следствие уравнений (5).

124. Вторая метода Якоби. Возвращаемся к системе (1), находящейся в инволюции. Посмотрим, нельзя ли к системе (1) присоединить новое уравнение

$$F_{m+1} = a_{m+1} \tag{6}$$

так, чтобы новая система из $m+1$ уравнений осталась замкнутой. Последнее будет наверное иметь место, если функция F_{m+1} находится в инволюции с функциями (4), т. е., если функция F_{m+1} одно из решений системы уравнений

$$(F_i, \Phi) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

Действительно, если все скобки

$$(F_i, F_{m+1}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

тожественно равны нулю, то равны тожественно нулю также и скобки

$$(F_i, F_{m+1} - a_{m+1})$$

и, значит, система из уравней (1) и (6) замкнутая.

Положим, что, изучая систему (7), нам удалось найти $n - m$ ее решений

$$F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n, \tag{8}$$

которые находятся между собою в инволюции. Тогда и функции

$$F_{m+1} - a_{m+1}, \ldots, F_n - a_n$$

будут находиться между собою в инволюции, и каждая из них находится в инволюции с функциями (4). Вследствие этого система уравнений

$$F_1 = 0, \ldots, F_m = 0, \; F_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, F_n = a_n \tag{9}$$

будет замкнутой (и даже в инволюции).

Если при этом окажется, что из системы (9) можно найти все производные

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \tag{10}$$

то при помощи квадратур, как вытекает из сказанного в § 103, мы найдем функцию z, удовлетворяющую системе (1); эта функция z, кроме постоянных $a_{m+1}, \ldots, a_n$ будет зависеть еще от одной аддитивной постоянной a и будет, следовательно, *полным интегралом* системы (1).

В сказанном заключается описание второй методы Якоби.

Сказанное можно резюмировать в виде следующей теоремы

Теорема. *Если мы найдем кроме функций*

$$F_1, F_2, \ldots, F_m, \tag{4}$$

образующих очевидное решение системы уравнений

$$(F_1, \Phi)=0, \ldots (F_m, \Phi)=0 \tag{7}$$

и находящихся в инволюции еще $n-m$ решений этой системы

$$F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_n \tag{8}$$

также находящихся в инволюции между собою, причем таких, что функции (4) *и* (8) *алгебраически независимы относительно аргументов*

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \tag{10}$$

то мы сможем найти полный интеграл системы (1) *при помощи квадратур.*

Последнюю теорему можно назвать *обобщенной теоремой Лиувилля.*

125. Нахождение состоящих в инволюции интегралов системы характеристических многообразий. Чтобы показать, что собрание функций (8), удовлетворяющих системе (7) и находящихся в инволюции между собою, всегда может быть найдено, отметим прежде всего, что система (7) замкнутая.

Для частного случая системы вида (5) это утверждение было установлено в § 118. Дадим теперь непосредственное доказательство теоремы для системы (1) более общего вида, считая, однако, систему (1) в инволюции.

Положив

$$X_i(\Phi)=(F_i, \Phi)=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}-\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\right),$$

находим

$$X_i(X_j(\Phi))-X_j(X_i(\Phi))=(F_i, (F_j, \Phi))-(F_j, (F_i, \Phi))=$$
$$=(F_i, (F_j, \Phi))+(F_j, (\Phi, F_i)).$$

Но на основании тожества Якоби мы имеем

$$(F_i, (F_j, \Phi))+(F_j, (\Phi, F_i))+(\Phi, (F_i, F_j))\equiv 0,$$

откуда, так как F_i, F_j в инволюции, заключаем, что

$$(F_i, (F_j, \Phi))+(F_j, (\Phi, F_i))\equiv 0.$$

Итак
$$X_i(X_j(\Phi)) - X_j(X_i(\Phi)) \equiv 0,$$
откуда вытекает замкнутость системы (7).

Функции $F_1, F_2, \ldots, F_m$ очевидно решения системы (7). Но система (7), как замкнутая, имеет $2n-m$ алгебраически независимых решениий, значит, $2n-2m$ решений, алгебраически независимых с указанными функциями. Положим, F_{m+1} одно из этих решений.

Присоединив к системе (7) уравнение
$$(F_{m+1}, \Phi) = 0, \tag{7$_1$}$$
мы получим снова замкнутую систему из $m+1$ уравнений. Эта система будет иметь решение F_{m+2}, не состоящее с ранее найденными в алгебраической зависимости, найдя которое мы присоединим к системе из уравнений (7) и (7$_1$) еще одно уравнение
$$(F_{m+2}, \Phi) = 0.$$

Новая система будет снова замкнутой, так как F_{m+2} находится в инволюции с F_{m+1}, и $F_1, \ldots, F_m$ как решение системы из уравнений (7) и (7$_1$); значит новая система будеть иметь решение F_{m+3} и т. д.

Поступая так далее, мы найдем после $n-m$ шагов собрание функций (8), каждая из которых удовлетворяет системе (7) и которые все находятся в инволюции между собою и алгебраически независимы.

Если окажется, что функция (4) и (8) алгебраически независимы относительно аргументов (10), задачу интегрирования системы (1) можно считать оконченной.

Мы покажем, как поступать, когда последнее обстоятельство не имеет места. Мы увидим, что и в этом случае составление полного интеграла системы (1) сводится к алгебраическим действиям и квадратурам.

126. Лемма. *Положим, что система уравнений, возможно зависящая от z,*
$$F_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n,\ z,\ p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n) = 0, \qquad (i=1,\ 2.\ \ldots,\ m) \tag{1$'$}$$
замкнута и положим, что она преобразована в систему
$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0,\ \ldots, \varphi_m = p_m - f_m = 0, \tag{5$'$}$$
причем якобиан
$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(p_1, \ldots, p_m)} \tag{2}$$
не равен нулю на основании уравнений системы. Положим далее, что функции собрания
$$F'_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_l \tag{8$'$}$$

удовлетворяют условиям

$$([F_i,\ F_j])\equiv 0,\ ([F_j,\ F_h])\equiv 0, \qquad \begin{pmatrix} i=1, & 2, & \ldots, m \\ j=m+1, & \ldots, & l \\ h=m+1, & \ldots, & l \end{pmatrix} \quad (11)$$

где знак (f) *обозначает результат замены в функции* f от $p_1, \ldots, p_m$ *этих аргументов их значениями из равенств* (5').

В таком случае

$$([\varphi_i,\ (F_j)])\equiv 0,\ ([(F_j),\ (F_h)])\equiv 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ \ldots, m \\ j,\ h=m+1, \ldots, l \end{pmatrix} \quad (12)$$

Заметим, что при выбранном обозначении, условие замкнутости системы (1') переводится равенствами

$$([F_i,\ F_g])\equiv 0 \qquad (i,\ g=1,\ 2,\ \ldots, m).$$

Примечание. Если функции (1') не зависят от z и находятся в инволюции, то равенства (12) имеют вид

$$(\varphi_i,\ (F_j))\equiv 0 \quad ((F_j),\ (F_h))\equiv 0.$$

Приступая к доказательству, отмечаем, что имеем

$$(F_h)=F_h(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ z,\ f_1, \ldots, f_m,\ p_{m+1}, \ldots, p_n) \quad (13)$$

и тожественно

$$(F_i)\equiv 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots, m) \quad (13')$$

Дифференцируя тожество (13') по x_l, z и p_l, получаем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(F_i)}{\partial x_l} &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_l}\right)+\sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_l}=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_l}\right)-\sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}\equiv 0\\
\frac{\partial(F_i)}{\partial z} &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)+\sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_k}{\partial z}=\left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)-\sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\equiv 0\\
\frac{\partial(F_i)}{\partial p_l} &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_l}\right)+\sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\frac{\partial f_k}{\partial p_l}=\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_l}\right)-\sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l}\equiv 0;
\end{aligned}\right\}(14)$$

последнее из тожеств (14) выведено в предположении, что $l>m$; оно остается справедливым и при $l\leqslant m$; в этом случае, именно, (F_i) от p_l не зависит и из производных $\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial p_l}$ только $\dfrac{\partial\varphi_l}{\partial p_l}$ равна единице, тогда как остальные — нули.

Умножая второе тожество на

$$f_l,\ \text{если}\ l\leqslant m,\ p_l,\ \text{если}\ l>m$$

и складывая с первым, получаем тожество

$$\left(\frac{dF_i}{dx_l}\right)-\sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\left(\frac{d\varphi_k}{dx_l}\right)\equiv 0. \quad (14'$$

Умножая третье тожество (14) на $\left(\frac{dF_j}{dx_l}\right)$, а тожество (14′) на $\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_l}\right)$, вычитая из первого произведения второе, давая l значение от 1 до n и, складывая, получим

$$([F_i, F_j]) - \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)([\varphi_k, F_j]) \equiv 0.$$

Так как первое слагаемое в полученном равенстве нуль на основании задания, имеем

$$\sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)([\varphi_k, F_j]) \equiv 0. \tag{15}$$

Давая в (15) i значения $1, 2, \ldots, m$, мы получим систему линейных уравнений с неизвестными

$$([\varphi_1, F_j]),\ ([\varphi_2, F_j]) \ldots ([\varphi_m, F_j]),$$

определитель которой равен якобиану (2) и не нуль. Значит

$$([\varphi_k, F_j]) \equiv 0. \qquad (j = 1, 2, \ldots, l,\ k = 1, 2, \ldots, m) \tag{16}$$

Считаем теперь, что j больше m и ищем производные от (F_j) по x_l и p_l. Имеем, поступая как при выводе тожеств (14) и (14′),

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(F)}{dx_l} &= \left(\frac{dF_j}{dx_l}\right) - \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\right)\left(\frac{d\varphi_k}{dx_l}\right) \\ \frac{\partial (F_j)}{\partial p_l} &= \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_l}\right) - \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\right)\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Умножая первое тожество на $\frac{\partial \varphi_h}{\partial p_l}$, второе на $\left(\frac{d\varphi_h}{dx_l}\right)$, вычитая из первого произведения второе, давая l значения 1, 2, ..., п и складывая, получаем

$$([\varphi_h, (F_j)]) = ([\varphi_2, F_j]) - \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F_j}{p_k}\right)([\varphi_h, \varphi_k]),$$

откуда, так как система (5′) замкнутая, имеем на основании (16):

$$([\varphi_h, (F_j)]) \equiv 0 \qquad (j = m+1, \ldots, n) \tag{18}$$

Умножая теперь первое из тожеств (17) на $\left(\frac{\partial F_h}{\partial p_l}\right)$, второе на

$\left(\frac{dF_h}{dx_l}\right)$, где $h>m$, вычитая из первого произведения второе, давая l значения $1, 2, \ldots, n$ и складывая, получаем

$$([F_h, (F_j)]) = ([F_h, F_j]) - \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\right)([F_h, \varphi_k]),$$

откуда, на основании (11) и (16), заключаем:

$$([F_h, (F_j)]) \equiv 0. \qquad (h, j = m+1, \ldots, n) \quad (19)$$

Умножаем, наконец, первое из тожеств (17) на $\frac{\partial(F_h)}{\partial p_l}$, второе на $\left(\frac{d(F_h)}{dx_l}\right)$, вычитаем из первого произведения второе, даем l значения $1, 2, \ldots, n$ и складываем.

Находим

$$([(F_h), (F_j)]) = ([(F_h), F_j]) - \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial p_k}\right)([(F_h), \varphi_k]),$$

откуда на основании (18) и (19) окончательно получаем

$$([(F_h), (F_j)]) \equiv 0. \qquad (20)$$

В тожествах (18) и (20) заключаются утверждения леммы.

Как первое следствие леммы имеем: системе уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_k} \cdot \frac{d\varphi_i}{dx_k} = 0, \quad (21)$$

соответствующей системе (5′), удовлетворяют функции

$$(F_{m+1}), \quad (F_{m+2}), \ldots, (F_l). \qquad (8')$$

Действительно, левая часть (21) не что иное, как $([\varphi_i, (\Phi)])$. При этом, так как функции $(8_1')$ не зависят от $p_1, p_2, \ldots p_m$, имеем

$$([(F_h), (F_j)]) \equiv [(F_h), (F_j)] \equiv 0, \qquad (22)$$

т. е. они находятся в инволюции.

В применении к функциям, рассмотренным в § 124, заключаем, что в случае нахождения функций (8), находящихся с ними и между собою в инволюции, после преобразования системы (1) в систему (5) операций возобновлять не приходится; функции

$$(F_{m+1}), (F_{m+2}), \ldots, (F_n), \qquad (23)$$

находятся в инволюции с левыми частями уравнений (5) и между собою.

127. Преобразование Лежандра. Изменим независимые переменные и неизвестную функцию, не меняя независимых переменных $x_1, \ldots, x_\mu$, но положив

$$\left.\begin{aligned} y_{\mu+1} = p_{\mu+1}, \ldots, y_n = p_n \\ Z = z - x_{\mu+1} p_{\mu+1} - \ldots - x_n p_n \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Дифференцируя второе равенство (24), получаем, пользуясь первыми равенствами (24):

$$\begin{aligned} dZ = p_1 dx_1 + \ldots + p_\mu dx_\mu + p_{\mu+1} dx_{\mu+1} + \ldots + p_n dx_n - \\ - x_{\mu+1} dp_{\mu+1} - \ldots - x_n dp_n - p_{\mu+1} dx_{\mu+1} - \ldots - p_n dx_n = \\ = p_1 dx_1 + \ldots + p_\mu dx_\mu - x_{\mu+1} dy_{\mu+1} - \ldots - x_n dy_n. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что производные от Z по $x_1, \ldots, x_\mu$ соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$; если мы условимся обозначать буквами $q_{\mu+1}, \ldots, q_n$ производные по $y_{\mu+1} \ldots, y_n$, то получим

$$q_{\mu+1} = -x_{\mu+1}, \ldots, q_n = -x_n$$

и, значит,

$$z = Z - y_{\mu+1} q_{\mu+1} - \ldots - y_n q_n.$$

Вводя новые переменные в функцию

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_n)$$

и обозначая преобразованную функцию F знаком $\overline{F}$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{F} = F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu - q_{\mu+1} \ldots - q_n, Z - y_{\mu+1} q_{\mu+1} - \ldots - \\ - y_n q_n, p_1, \ldots, p_\mu, y_{\mu+1}, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial y_j} = \frac{\partial F}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial z} q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

$$\frac{d\overline{F}}{dx_i} = \frac{dF}{dx_i}, \qquad \frac{d\overline{F}}{dy_j} = \frac{\partial F}{\partial p_j} \qquad (j = \mu+1, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial p_i} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z} p_j = -\frac{dF}{dx_j}.$$

Вследствие этого

$$\begin{aligned} [\overline{F}_1, \overline{F}_2] = \sum_{i=1}^{i=\mu} \left(\frac{\partial \overline{F}_1}{\partial p_i} \frac{d\overline{F}_2}{dx_i} - \frac{d\overline{F}_1}{dx_i} \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial p_i} \right) + \\ + \sum_{j=\mu+1}^{j=n} \left(\frac{\partial \overline{F}_1}{\partial q_j} \frac{d\overline{F}_2}{dy_j} - \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial q_j} \frac{d\overline{F}_1}{dy_j} \right) = \sum_{i=1}^{i=\mu} \left(\frac{\partial \overline{F_1}}{\partial p_i} \frac{d\overline{F_2}}{dx_i} - \frac{d\overline{F_1}}{dx_i} \frac{\partial \overline{F_2}}{\partial p_i} \right) + \\ + \sum_{j=\mu+1}^{j=n} \left(-\frac{d\overline{F_1}}{dx_j} \frac{\partial \overline{F_2}}{\partial p_j} + \frac{d\overline{F_2}}{dx_j} \frac{\partial \overline{F_1}}{\partial p_j} \right) = \overline{[F_1, F_2]}. \end{aligned}$$

Итак имеем:

$$[\overline{F}_1,\ \overline{F}_2] = \overline{[F_1,\ F_2]}. \tag{25}$$

Если функции F_1, F_2 были в инволюции, то функция $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ также в инволюции.

128. Дополненне второй нкобиевой методы. Положим, в отличие от § 124, что рассматривается система уравнений, независимых от z:

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ldots, \quad \varphi_m = p_m - f_m = 0, \tag{5}$$

которая в инволюции:

$$(\varphi_i,\ \varphi_j) \equiv 0. \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \tag{26}$$

Составляем систему линейных уравнений, ей соответствующую

$$(\varphi_i,\ \Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{k=n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{27}$$

и систему в полных дифференциалах, определяющую характеристические многообразия C_m системы (5):

$$\left.\begin{aligned} dx_k &= \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} dx_i \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (k = m+1, \ldots, n) \\ dp_k &= -\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_i \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Положим, что имеются $n - m$ интегралов системы (28):

$$\Phi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \ \Phi_\mu = a_\mu,\ \Phi_{\mu+1} = a_{\mu+1}, \ldots, \Phi_n = a_n, \tag{29}$$

находящихся в инволюции, т. е. таких, что

$$(\Phi_h,\ \Phi_j) \equiv 0. \qquad (h, j = m+1, \ldots, n) \tag{30}$$

Случай, когда из уравнений (29) можно найти производные

$$p_{m+1}, \ldots, p_n, \tag{31}$$

рассмотрен нами в § 124 и там показано, как в этом случае составить полный интеграл системы (5).

Положим теперь, что из уравнений (29) нельзя найти аргументов (31). Положим, что из первых $\mu - m$ уравнений:

$$\Phi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \ \Phi_\mu = a_\mu \tag{29_1}$$

могут быть найдены аргументы $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$; положим, что решая их, мы найдем уравнения

$$\varphi_{m+1} = p_{m+1} - f_{m+1} = 0, \ldots, \ \varphi_\mu = p_\mu - f_\mu = 0$$

и что, исключая найденные производные из остальных уравнений (29), мы преобразуем их в

$$(\Phi_{\mu+1}) = a_{\mu+1}, \ldots, (\Phi_n) = a_n. \qquad (32)$$

Докажем прежде всего, что из уравнений (32), зависящих только от $x_1, \ldots, x_n$, могут быть найдены аргументы $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.

Действительно, если (φ_i), $i = 1, 2, \ldots, m$ обозначает результат исключения из функции φ_i аргументов $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$, то функции (Φ_j), $j = \mu + 1, \ldots, n$ удовлетворяют на основании леммы системе уравнений

$$((\varphi_i), (\Phi)) = 0, \ (\varphi_h, (\Phi)) = 0, \ (h = m+1, \ldots, \mu, i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (33)$$

Уравнения (5′) леммы имеют по нашим обозначениям вид:

$$(\varphi_i) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, m), \ \varphi_h = 0, \ (h = m + 1, \ldots, \mu).$$

Так как уравнения (33) решены относительно

$$\frac{\partial(\Phi)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial(\Phi)}{\partial x_\mu},$$

система в полных дифференциалах аналогичная (28), но соответствующая системе (33), имеет $2(n - \mu)$ интегралов, разрешимых относительно

$$x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n, \ p_{\mu+1}, \ldots, p_n.$$

На основании леммы § 126 уравнения (32) образуют систему независимых интегралов для этой системы в полных дифференциалах и так как они не зависят от $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$, то они разрешимы относительно $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.

Установив это, возвращаемся к системе (5) и выполняем в ней подстановку Лежандра, положив

$$Z = z - x_{\mu+1} p_{\mu+1} - \ldots - x_n p_n, \ y_{\mu+1} = p_{\mu+1}, \ldots, y_n = p_n$$

и не меняя переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_\mu.$$

Мы преобразуем, пользуясь обозначениями прошлого параграфа, систему (5) в систему

$$\overline{\varphi}_1 = 0, \ldots, \overline{\varphi}_m = 0, \qquad (5')$$

причем в системе уравнений

$$\overline{\Phi}_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \overline{\Phi}_\mu = a_\mu, \ \overline{\Phi}_{\mu+1} = a_{\mu+1}, \ldots, \overline{\Phi}_n = a_n, \qquad (29')$$

функции $\overline{\Phi}$ находятся в инволюции между собою и с функциями $\overline{\varphi}$. Так как при выполненном преобразовании $x_\mu, \ldots, x_n$ заменены через $-q_{\mu+1}, \ldots, -q_n$, уравнения (29′) разрешимы относительно

$$p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_\mu, \quad q_{\mu+1}, \ldots, q_n$$

Мы находимся, следовательно, в условиях § 124. Найдя из уравнений (5′) и (29′) производные $p_1, \ldots p_\mu, q_{\mu+1}, \ldots, q_n$ и интегрируя полный дифференциал

$$dZ = p_1 dx_1 + \ldots + p_\mu dx_\mu + q_{\mu+1} dy_{\mu+1} + \ldots + q_n dy_n,$$

мы найдем полный интеграл систем (5′):

$$Z = W(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, \ldots, y_n, a_{m+1}, \ldots, a_n) - a. \tag{34}$$

По самому составлению функции (34), уравнения

$$p_{m+1} = \frac{\partial W}{\partial x_{m+1}}, \ldots, p_\mu = \frac{\partial W}{\partial x_\mu}, \quad q_{\mu+1} = \frac{\partial W}{\partial y_{\mu+1}}, \ldots, q_n = \frac{\partial W}{\partial g_n} \tag{35}$$

равносильны уравнениям (29′) и после решения относительно $a_{m+1}, \ldots, a_n$ обращаются в

$$\overline{\Phi}_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \overline{\Phi}_\mu = q_\mu, \overline{\Phi}_{\mu+1} = a_{\mu+1}, \ldots, \overline{\Phi}_n = a_n. \tag{29′}$$

Составляем далее по интегралу (34) уравнения, определяющие характеристическое многообразие C_m системы (5′):

$$b_{m+1} = \frac{\partial W}{\partial a_{m+1}}, \ldots, b_\mu = \frac{\partial W}{\partial a_\mu}, \quad b_{\mu+1} = \frac{\partial W}{\partial a_{\mu+1}}, \ldots, b_n = \frac{\partial W}{\partial a_n}. \tag{36}$$

Исключая из последних уравнений $a_{m+1}, \ldots, a_n$ при помощи уравнений (29′), мы, пользуясь обозначениями § 122, преобразуем уравнения (36) в

$$\begin{gathered} b_{m+1} = \left(\frac{\partial W}{\partial a_{m+1}}\right), \ldots, b_\mu = \left(\frac{\partial W}{\partial a_\mu}\right), \\ b_{\mu+1} = \left(\frac{\partial W}{\partial a_{\mu+1}}\right), \ldots, b_n = \left(\frac{\partial W}{\partial a_n}\right). \end{gathered} \tag{37}$$

По теореме § 122 имеем

$$\left(\overline{\Phi}_j, \left(\frac{\partial W}{\partial a_h}\right)\right) \equiv 0, \ (j \neq h); \ \equiv 1, \ j = h; \ \left(\left(\frac{\partial W}{\partial a_h}\right), \left(\frac{\partial W}{\partial a_j}\right)\right) \equiv 0,$$
$$(h, j = m+1, \ldots, \text{п}).$$

Кроме того

$$\left(\overline{\varphi}_i, \left(\frac{\partial W}{\partial a_j}\right)\right) \equiv 0, \ (j = m+1, \ldots, n) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{38}$$

так как равенства (37) образуют интегралы уравнений в полных дифференциалах, определяющих характеристические многообразия C_m системы (5′).

Так как из первых $\mu - m$ уравнений (29), можно найти $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$, а из последних $n - \mu$ можно найти $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$, то из первых $\mu - m$ уравнений (29′) можно найти $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$, а из последних

$n-\mu$ можно найти $q_{\mu+1},\ldots,q_n$. Основываясь на этом, мы можем заключить, что из последних $n-\mu$ уравнений (37) можно, после исключения из них $p_{m+1},\ldots,p_\mu$, найти $y_{\mu+1},\ldots,y_n$.

Действительно, если нахождение $p_{m+1},\ldots,p_\mu$ из первых $\mu-m$ уравнений (29') преобразует их в

$$\overline{\varphi}_{m+1}=0,\ \ldots,\ \ \overline{\varphi}_\mu=0,$$

если исключение этих аргументов из уравнений (5') преобразует их

$$(\overline{\varphi}_1)=0,\ \ldots,(\overline{\varphi}_m)=0,$$

а исключение их из левых частей последних $n-\mu$ уравнений (29') и (37) приводит к функциям

$$(\overline{\Phi}_{\mu+1}),\ldots,\ (\overline{\Phi}_n),\ \left(\left(\frac{\partial W}{\partial a_{\mu+1}}\right)\right),\ldots,\ \left(\left(\frac{\partial W}{\partial a_n}\right)\right), \tag{39}$$

то на основании леммы § 126 функции (39) образуют полное собрание решений системы

$$((\overline{\varphi}_i),\ \psi)=0,\ (\overline{\varphi}_j,\ \psi)=0,\ i=1,2,\ldots,m,\ j=m+1,\ldots,\mu.$$

Функции такого полного собрания алгебраически независимы относительно $2(n-\mu)$ аргументов

$$q_{\mu+1},\ q_{\mu+2},\ldots,q_m,\ \ y_{\mu+1},\ldots,y_m,$$

а так как последние уравнения (29') разрешимы относительно $q_{\mu+1},\ldots,q_n$, на долю последних $n-\mu$ уравнений (37) остается оказаться разрешимыми относительно $y_{\mu+1},\ldots,y_n$.

Возвращаемся теперь к старым переменным. Уравнения (5') обращаются в (5), первые $\mu-m$ уравнений (29') обращаются в

$$\Phi_{m+1}=a_{m+1},\ldots,\ \Phi_\mu=a_\mu, \tag{40}$$

а последние $n-\mu$ уравнений (39) обращаются, скажем, в

$$\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial a_{\mu+1}}}\right)=b_{\mu+1},\ldots,\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial a_n}}\right)=b_n. \tag{40'}$$

Функции

$$\Phi_{m+1},\ \Phi_{m+2}\ldots,\ \Phi_\mu,\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial a_{\mu+1}}}\right),\ldots,\ \left(\overline{\frac{\partial W}{\partial a_n}}\right) \tag{41}$$

находятся, по сказанному в § 127, в инволюции между собою и в инволюции с функциями $\varphi_1,\ldots,\ \varphi_m$.

При этом, система уравнений (40) и (40') разрешима относительно

$$p_m,\ p_{m+1}\ \ldots,\ p_\mu,\ p_{\mu+1},\ldots p_n, \tag{42}$$

так как при обратном переходе $y_{\mu+1},\ldots,y_n$ обращаются в $p_{\mu+1},\ldots,p_n$

Найдя собрание уравнений (40) и (40′), мы, значит, находимся в условиях § 124 и можем, найдя из них функции (42), составить, интегрируя, полный дифференциал

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

полный интеграл системы (5).

129. Примеры. 1) Найти полный интеграл системы

$$F_1 = x_1^2 p_2 - 2p_3^2 = 0, \quad F_2 = x_1 p_1 - 2x_1^2 - p_3 x_3 = 0. \tag{43}$$

Система замкнутая, так как

$$(F_1, F_2) = 4p_3^2 - 2x_1^2 p_2 = -2F_1.$$

Следовательно, система

$$p_2 - \frac{2p_3^2}{x_1^2} = 0, \quad p_1 - 2x_1 - \frac{p_3 x_3}{x_1} = 0 \tag{44}$$

в инволюции. Отыскивая какое-нибудь решение системы

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{4p_3}{x_1^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{x_3}{x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \frac{p_3}{x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0,$$

легко находим, что ей удовлетворяет функция

$$\Phi = \frac{p_3}{x_1}.$$

Присоединяя к уравнениям (44) уравнение

$$\frac{p_3}{x_1} = a_3$$

и решая полученные уравнения, находим:

$$p_1 = 2x_1 + a_3 x_3, \quad p_2 = 2a_3^2, \quad p_3 = a_1 x_1,$$

откуда заключаем, что полный интеграл системы (43)

$$z = x_1^2 + a_3 x_1 x_3 + 2a_3^2 x_2 - a.$$

2) Найти полный интеграл уравнения

$$F = (p_1 + p_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - x_3 p_3 = 0. \tag{45}$$

Составляя уравнение

$$(F, \Phi) = 2(p_1 + p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + 2(p_1 + p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - 2(x_1 - x_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} +$$

$$+ 2(x_1 - x_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} - x_3\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + p_3\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0,$$

без труда убеждаемся, что функции

$$\Phi_3 = x_3 p_3, \quad \Phi_2 = x_1 - x_2 \tag{46}$$

ему удовлетворяют. Функции Φ_2 и Φ_3 очевидно находятся в инволюции. Выполнив подстановку Лежандра, полагая

$$Z = z - x_2 p_2, \quad p_2 = y_2, \quad q_2 = -x_2$$

и не меняя x_1 и x_3, мы преобразуем уравнение (45) в уравнение

$$(p_1+y_2)^2+(x_1+q_2)^2-x_3p_3=0 \tag{45'}$$

и имеем возможность, преобразуя (46), присоединить к нему еще два других в инволюции с ним и в инволюции между собою:

$$x_3p_3=a_3, \quad x_1+q_2=a_2. \tag{46'}$$

Отыскивая из уравнений (45′) и (46′) p_1, p_3, q_2, находим

$$p_3=\frac{a_3}{x_3}, \quad q_2=a_2-x_1, \quad p_1=-y_2+\sqrt{a_3-a_2^2}$$

и получаем полный интеграл уравнения (45′):

$$Z=-y_2x_1+\sqrt{a_3-a_2^2}\cdot x_1+a_2y_2+a_3\log x_3-a.$$

Ограничиваясь только необходимыми выкладками, пишем:

$$b_2=y_2-\frac{a_2x_1}{\sqrt{a_3-a_2^2}};$$

исключение a_2 и a_3 при помощи уравнений (46′) дает

$$b_2=y_2-\frac{(x_1+q_2)\,x_1}{\sqrt{x_3p_3-(x_1+q_2)^2}}.$$

Возвратившись к старым переменным, видим, что к уравнению (45) можно присоединить два уравнения:

$$x_3p_3=a_3, \quad p_2-\frac{(x_1-x_2)\,x_1}{\sqrt{x_3p_3-(x_1-x_2)^2}}=b_2; \tag{47}$$

решая уравнения (45) и (47), находим

$$p_3=\frac{a_3}{x_3}, \quad p_2=b_2+\frac{(x_1-x_2)\,x_1}{\sqrt{a_3-(x_1-x_1)^2}},$$

$$p_1=-b_2-\frac{(x_1-x_2)\,x_1}{\sqrt{a_3-(x_1-x_2)^2}}+\sqrt{a_3-(x_1-x_2)^2},$$

откуда вытекает, что

$$z=-b_2x_1+x_1\sqrt{a_3-(x_1-x_2)^2}+b_2x_2+a_3\log x_3-a$$

полный интеграл уравнения (45).

130. Системы уравнений, зависящих от неизвестной функции. Теория, развитая в § 124, 125, 126 и 128, может быть распространена и на системы уравнений, зависящих от неизвестной функции.

Положим, дана система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)=0 \end{array}\right\} \tag{48}$$

в инволюции, т. е. такая, в которой каждая скобка

$$[F_i, F_j] \tag{49}$$

тожественно равна нулю. Составим систему уравнений

$$[F_i,\ \Phi]=\sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\ \frac{dF_i}{dx_k}\right]=0. \qquad (50)$$

Система уравнений (50) замкнутая. Действительно, по сказанному в § 31 мы имеем

$$[F_j, [F_i, \Phi]]+[F_i, [\Phi, F_j]]+[\Phi, [F_j, F_i]]=\frac{\partial F_j}{\partial z}[F_i, \Phi]+$$
$$+\frac{\partial F_i}{\partial z}[\Phi, F_j]+\frac{\partial \Phi}{\partial z}[F_j, F_i].$$

Следовательно, если положить

$$[F_i,\ \Phi]=X_i(\Phi),$$

то на основании заданий о системе (48) имеем:

$$X_j(X_i(\Phi))-X_i(X_j(\Phi))=\frac{\partial F_j}{\partial z}X_i(\Phi)-\frac{\partial F_i}{\partial z}X_j(\Phi),$$

откуда вытекает замкнутость системы (50).

Если нам удастся найти $n+1-m$ решений системы (50)

$$F_{m+1},\ F_{m+2},\ldots,\ F_n,\ F_{n+1}, \qquad (51)$$

находящихся в инволюции между собою, т. е. таких, что

$$[F_j, F_h]\equiv 0, \quad (j, h=m+1,\ldots, n+1),$$

то система уравнений

$$F_1=0,\ldots,\ F_m=0,\ F_{m+1}=a_{m+1},\ldots,\ F_n=a_n,\ F_{n+1}=a \qquad (52)$$

будет в инволюции. Если, кроме этого, из системы (52) можно найти

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n,\ z,$$

то, по сказанному в § 105, найденное z будет решением системы (52) и, в частности, решением системы (48), зависящим от $n-m+1$ произвольных постоянных, причем исключение этих произвольных постоянных из уравнений

$$p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1},\ldots,\ p_n=\frac{\partial z}{\partial x_n}$$

приводит только к таким уравнениям, которые равносильны системе (48). Значит, z будет полным интегралом системы.

В сказанном заключается обобщение теоремы § 124.

131. Распространение второй методы Якоби на замкнутые системы, зависящие от неизвестной функции. Для приложения указанной методы к любой замкнутой системе надо уметь преобразовывать ее в систему в инволюции, чего теперь, решением относительно $p_1, p_2,\ldots, p_n$, предполагая, что она относительно этих аргументов разрешима, достигнуть уже нельзя. Для достижения цели приходится выбирать аргументы, отличные от указанных.

Для проведения рассуждений мы нуждаемся в более общей теореме о скобках, чем те, которыми мы пользовались до сих пор.

Теорема. *Если дана система*

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (48)$$

разрешимая относительно некоторых из аргументов

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n \quad (53)$$

и система

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (48')$$

ей эквивалентная, т. е. такая, которой удовлетворяют те же значения аргументов (53), и если система (48) замкнутая, т. е. если скобки

$$[F_i, F_j]$$

обращаются в нуль значениями (53), найденными из уравнений (48), то система (48′) тоже замкнутая.

При доказательстве теоремы мы будем предполагать, что, впрочем, не оговаривая, мы делаем всегда, что функции F_i, Φ_i голоморфны вблизи некоторых начальных значений их аргументов.

Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = F_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и решим ее относительно тех аргументов (53), которые мы находим из системы (48). Мы получим их в виде функций от остальных аргументов (53) и аргументов

$$F_1, F_2, \ldots, F_m;$$

при этом эти функции голоморфны при

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ldots, \ F_m = 0.$$

Подставляя найденные значения в функции (48′), мы дадим им вид

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = \psi_i(u, F_1, \ldots, F_m), \quad (54)$$

где буквами u обозначены не исключенные аргументы (53) и где ψ_i разложимы в ряды по возрастающим степеням $F_1, \ldots, F_m$; при этом равенства (54) обращаются в тожества после замены F_i их значениями.

Все функции Φ_i обращаются в нуль от подстановки в них аргументов (53), найденных из уравнений (47); значит,

$$\psi_i(u, 0, \ldots, 0) \equiv 0,$$

т. е. указанные выше ряды не имеют свободных членов.

Вследствие этого, вынося из членов рядов, зависящих от F_1, F_1 за скобки; вынося из оставшихся членов, которые зависят от F_2, F_2 за скобки и поступая так далее, мы можем равенствам (54) дать вид

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = A_1^{(i)} F_1 + \ldots + A_m^{(i)} F_m, \quad (54')$$

где A — функции от аргументов (53).

Из последних равенств на основании свойств скобок Якоби вытекает равенство

$$[\Phi_i, \Phi_j] = \Big[\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{(i)} F_k, \ \sum_{l=1}^{l=m} A_l^{(j)} F_l\Big] =$$

$$= \sum_{l=1}^{l=m} \Big\{\Big[\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{(i)} F_k, \ A_l^{(j)}\Big] F_l + \Big[\sum_{k=1}^{k=n} A_k^{(i)} F_k, F_l\Big] A_l^{(j)}\Big\} =$$

$$= \sum_{l=1}^{l=m} \sum_{k=1}^{k=m} \{[A_k^{(i)}, \ A_l^{(j)}] F_k \ F_l + [F_k, A_l^{(j)}] A_k^{(i)} F_l +$$

$$+ [A_k^{(i)}, \ F_l] A_l^{(j)} F_k + [F_k, F_l] A_k^{(i)} A_l^{(j)}\},$$

из которого следует справедливость теоремы.

Теорема § 102 лишь частный случай доказанной теоремы, также все выкладки § 105 покрываются этой теоремой.

Основываясь на доказанной теореме, легко установить, что, решая замкнутую систему (48) относительно m из аргументов

$$x_1, \ x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n,$$

мы преобразовываем ее в систему в инволюции. Действительно, если система

$$\varphi_1 = x_1 - f_1 = 0, \ldots, \varphi_m = x_m - f_m = 0 \tag{55}$$

равносильна замкнутой системе (48), то она замкнута. Но скобки

$$[\varphi_i, \ \varphi_j]$$

не зависят от $x_1, \ldots, x_n$, так как функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ линейны относительно этих аргументов, и потому, будучи обращающимися в нуль на основании уравнений (55), они равны нулю тождественно.

Также мы преобразуем систему (48) в систему в инволюции, решив ее относительно z и $m-1$ из аргументов $p_1, \ldots, p_m, \ldots, p_n$, например, переписав в виде

$$z - f = 0, \quad p_1 - f_1 = 0, \ldots, \ p_{m-1} - f_{m-1} = 0$$

и заменив системой

$$\left.\begin{aligned} \varphi = z - f - x_1(p_1 - f_1) - \ldots - x_{m-1}(p_{m-1} - f_{m-1}) = 0 \\ \varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ldots, \ \varphi_{m-1} = p_{m-1} - f_{m-1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{55$_1$}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что скобки

$$[\varphi, \varphi_i], \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{56}$$

тождественно равны нулю; система (55_1), именно, замкнута и последние ее $m-1$ уравнения, как не зависящие от z и решенные относительно $p_1, \ldots, p_{m-1}$, находятся в инволюции. Составляя же скобку (56), имеем

$$[\varphi, \varphi_i] = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial\varphi}{\partial p_k} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} - \left(-\frac{\partial f}{\partial x_i} + x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \right.$$

$$\left. + x_{m-1} \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_i} + f_i \right) - \sum_{k=m+1}^{k=n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + p_k \right);$$

выписанные же члены в последнем равенстве не зависят от $p_1, \ldots, p_{m-1}$, z, и потому последняя скобка равна нулю тожественно.

Отметим, однако, что задание о том, что система (48) в инволюции, нам нужно только для того, чтобы установить, что система (50) замкнутая.

Если для замкнутой системы (48) мы найдем $n+1-m$ функций (51), находящихся в инволюции с левыми частями уравнений системы (48) и между собою, то система (52) попрежнему будет замкнутой, и заключение прошлого параграфа останется справедливым.

Последнее заключение позволяет видоизменить методу так чтобы использовать сказанное в § 118.

Переделав данную замкнутую систему (48) в систему

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m = p_m - f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0 \end{array} \right\} \qquad (57)$$

предполагая, конечно, что якобиан

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(p_1, \ldots, p_m)} \qquad (58)$$

не обращается в нуль на основании уравнений (48), мы можем систему (50) заменить системой

$$([\varphi_i, \Phi]) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial\Phi}{\partial z} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{k=n} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial\Phi}{\partial p_k} \frac{d\varphi_i}{dx_k} \right) = 0. \; (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (59)$$

Система (59) замкнута и так как она нормальная, то и в инволюции.

Если мы найдем $n+1-m$ независимых решений системы (59)

$$\Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}, \ldots \Phi_n, \Phi_{n+1}, \qquad (60)$$

находящихся в инволюции между собою, то система уравнений

$$\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_m = 0, \; \Phi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \Phi_n = a_n, \; \Phi_{n+1} = a \quad (61)$$

будет замкнутой. Действительно, мы имеем

$$([\varphi_i, \Phi_h - a_h]) = ([\varphi_i, \Phi_h]) \equiv 0, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

$$[\Phi_h - a_h, \Phi_g - a_g] = [\Phi_h, \Phi_g] \equiv 0. \; h = m+1, \ldots, n+1.$$

Следовательно, если из уравнений (61) можно найти

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, z, \tag{62}$$

то мы сможем найти полный интеграл системы (57) и даже без новых интегрирований.

Последнее обстоятельство имеет место не всегда. Но можно внести в теорию некоторые добавления, аналогичные добавлениям § 128, и сделать ее приводящей к цели во всех случаях.

Отметим, что если система (48) была в инволюции и были найдены функции (51), находящиеся в инволюции с левыми частями уравнений (48) и между собою, то после преобразования системы (48) в систему (57) функции (60) могут быть написаны сразу: они получаются из функций (51) простым исключением аргументов $p_1, \ldots, p_m$ при помощи уравнений (57).

Это непосредственно вытекает из леммы § 126 и может оказаться полезным в случае, когда система (52) не разрешима относительно аргументов (62).

132. Дополнение к распространенной методе Якоби. Положим теперь, что система (61) не может быть решена относительно аргументов (62). Положим, что кроме аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_m$, данных первыми m уравнениями (61), из следующих $\mu - m$ уравнений:

$$\Phi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \Phi_\mu = a_\mu \tag{63}$$

могут быть найдены $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$ и что исключение их из остальных уравнений (61) приводит к уравнениям, не зависящим более от аргументов $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$. Докажем, что в этом случае из оставшихся уравнений могут быть найдены аргументы $x_{\mu+1}, \ldots x_n$, z. Действительно, найдем из уравнений (63) $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$ и исключим их из первых m уравнений (61). Мы преобразуем эти уравнения и уравнения (63) в систему

$$\begin{aligned}\{\varphi_1\} &= p_1 - \{f_1\} = 0, \ldots, \{\varphi_m\} = p_m - \{f_m\} = 0, \varphi_{m+1} = \\ &= p_{m+1} - f_{m+1} = 0, \ldots, \varphi_\mu = p_\mu - f_\mu = 0.\end{aligned} \tag{64}$$

Этой системе отвечает система

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \{f_i\}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \sum_{k=\mu+1}^{k=n}\left(\frac{\partial\{\varphi_i\}}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial\Phi}{\partial p_k}\frac{d\{\varphi_i\}}{dx_k}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} + f_j\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \sum_{k=\mu+1}^{k=n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial\Phi}{\partial p_k}\frac{d\varphi_j}{dx_k}\right) = 0, \qquad (j = m+1, \ldots, \mu)\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

По сказанному в § 126 функции

$$\{\Phi_{\mu+1}\}, \ldots, \{\Phi_n\}, \{\Phi_{n+1}\} \tag{66}$$

образуют независимые решения системы (65).

Действительно, мы имеем по заданию

$$([\varphi_i, \Phi_{j1}]) \equiv 0, \ [\Phi_k, \Phi_j] \equiv 0, \ [\Phi_j, \Phi_{j1}] \equiv 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j_1 = \mu + 1, \ldots n, n+1 \\ k = m + 1, \ldots, \mu \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\{[\varphi_i, \Phi_{i1}]\} \equiv 0, \ \{[\Phi_k, \Phi_j]\} \equiv 0 \ \{[\Phi_j, \Phi_{i1}]\} \equiv 0,$$

если знак $\{\ \}$ обозначает результат исключения $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$ при помощи уравнений (63).

Но тогда по лемме § 126:

$$\{[\varphi_i, \Phi_{j1}]\} \equiv 0, \{[\Phi \text{ и } \Phi_j]\} \equiv 0 \ \{[\Phi_i, \Phi_{j1}]\} \equiv 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = m + 1, \ldots, \mu \\ h = \mu + 1, \ldots, n + 1 \end{pmatrix}.$$

Последние тожества соответствуют уравнениям (65).

Система (65) имеет $2(n-\mu)+1$ решений, независимых относительно

$$x_{\mu+1}, \ x_{\mu+2} \ldots, x_n, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_n;$$

так как по предположению функции (66) не зависят от $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$, уравнения

$$\{\Phi_{\mu+1}\} = a_{\mu+1}, \ldots, \{\Phi_n\} = a_n, \{\Phi_{n+1}\} = a \tag{67}$$

должны быть разрешимы относительно аргументов $x_{\mu+1}, \ldots, x_n, z$.

Выполним теперь подстановку Лежандра, положив

$$\left.\begin{aligned} p_{\mu+1} &= y_{\mu+1}, \ldots, p_n = y_n, \ Z = z - p_{\mu+1} \ x_{\mu+1} - \ldots - p_n x_n \\ x_{\mu+1} &= -q_{\mu+1}, \ldots, x_n = -q_n, z = Z - q_{\mu+1} \ y_{\mu+1} - \ldots - q_n y_n \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Мы преобразуем систему (57) в систему

$$\bar\varphi_1 = p_1 - \bar f_1 = 0, \ldots, \bar\varphi_m = p_m - \bar f_m = 0, \tag{57'}$$

в которой

$$f_i = \bar f_i(x_1, \ x_2, \ldots, x_\mu, \ -q_{\mu+1}, \ldots, -q_n, \ Z - q_{\mu+1} y_{\mu+1} - \ldots - q_n y_n,$$
$$p_1, \ldots, p_\mu, \ y_{\mu+1}, \ldots, y_n)$$

и которая также замкнута. Функции (60) преобразуются в функции

$$\bar\Phi_{m+1}, \ldots, \bar\Phi_n, \ \bar\Phi_{n+1}, \tag{60'}$$

в которых

$$\bar\Phi_j = \Phi_j(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, -q_{\mu+1}, \ldots, -q_n, Z - q_{\mu+1} \ y_{\mu+1} - \ldots - q_n y_n,$$
$$p_{m+1}, \ldots, p_\mu, \ y_{\mu+1}, \ldots, y_n).$$

При этом, так как

$$\overline{[\varphi_i, \Phi_j]} = [\overline{\varphi}_i, \overline{\Phi}_j], \quad \overline{[\Phi_j, \Phi_h]} = [\overline{\Phi}_j, \overline{\Phi}_h]$$

и

$$([\varphi_i, \Phi_j]) = [\varphi_i \Phi_j] - \varphi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}, \ ([\overline{\varphi}_i, \overline{\Phi}_j]) = [\overline{\varphi}_i, \overline{\Phi}_j] - \overline{\varphi}_i \frac{\partial \overline{\Phi}_j}{\partial Z}, \ \overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{\Phi}_j}{\partial z},$$

имеем

$$\overline{([\varphi_i \Phi_j])} = ([\overline{\varphi}_i, \overline{\Phi}_j]).$$

Значит функции (60′) образуют решения системы

$$([\overline{\varphi}_i, \overline{\Phi}]) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{59′}$$

и находятся в инволюции между собою.

Уравнения

$$\overline{\varphi}_1 = 0, \ldots, \overline{\varphi}_m = 0, \ \overline{\Phi}_{m+1} = a_{n+1}, \ldots, \overline{\Phi}_n = a_n, \ \overline{\Phi}_{n+1} = a, \tag{61′}$$

однако, разрешимы относительно аргументов

$$p_1, p_2, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_\mu, q_{\mu+1}, \ldots, q_n, Z. \tag{62′}$$

Последние $n+1-\mu$ уравнений (61) могут быть, при помощи первых μ, преобразованы к виду

$$x_{\mu+1} = \psi_{\mu+1}(x_1, x_2, \ldots, x_\mu), \ldots, \ x_n = \psi_n(x_1, \ldots, x_\mu), \ z = \psi(x_1, \ldots, x_\mu),$$

откуда ясно, что последние $n+1-\mu$ уравнений (61′) могут быть, при помощи остальных, переделаны в

$$-q_{\mu+1} = \psi_{\mu+1}(x_1, x_2, \ldots, x_\mu), \ldots, -q_n = \psi_n(x_1, \ldots, x_\mu), \ Z - q_{\mu+1} y_{\mu+1} - \\ - \ldots - q_n y_n = \psi(x_1, \ldots, x_\mu).$$

Итак, мы находимся после преобразования в условиях, отмеченных в § 131, и Z, найденное после решения уравнений (61′):

$$Z = W(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, \ldots, y_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \tag{69}$$

будет полным интегралом системы (57′).

Отсюда вытекает, что, решая относительно $a_{m+1}, \ldots, a_n, a, b_{m+1}, \ldots, b_n$ уравнение (69) и уравнения

$$\left.\begin{array}{l} p_{m+1} = \dfrac{\partial W}{\partial x_{m+1}}, \ \ldots, \ p_\mu = \dfrac{\partial W}{\partial x_\mu}, \ q_{\mu+1} = \dfrac{\partial W}{\partial y_{\mu+1}}, \ldots, q_n = \dfrac{\partial W}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial W}{\partial a} b_{m+1} + \dfrac{\partial W}{\partial a_{m+1}} = 0, \ldots, \ \dfrac{\partial W}{\partial a} b_n + \dfrac{\partial W}{\partial a_n} = 0 \end{array}\right\} \tag{70}$$

мы получим полную систему независимых решений системы (59′).

Если, следуя сказанному в § 118, мы обозначим через ψ со значками меньшими $n+2$ решения системы из уравнения (69) и уравнений (70) в первой строке, то мы получим, что решения системы (70) даны равенствами

$$\left.\begin{array}{c}\psi_{m+1}=a_{m+1},\ldots,\ \psi_\mu=a_\mu,\ \psi_{\mu+1}=a_{\mu+1},\ldots,\ \psi_n=a_n,\ \psi_{n+1}=a\\ \psi_{n+m+1}=b_{m+1},\ldots,\ \psi_{2n}=b_n,\end{array}\right\}\quad(71)$$

где вообще

$$\psi=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_\mu,\ y_{\mu+1},\ldots y_n,\ Z,p_1,\ldots,p_\mu,\ q_{\mu+1},\ldots,q_n).$$

Отметим при этом, что на основании теоремы § 122 справедливы зависимости

$$[\psi_i,\psi_j]\equiv 0,(i,j=m+1,\ldots,n+1),[\psi_{n+h},\psi_{n+g}]\equiv 0,(h,g=m+1,\ldots,n)$$

$$[\psi_i,\psi_{n+j}]\equiv 0,\ (i,j=m+1,\ldots,n,\ i\neq j),\ [\psi_i,\ \psi_{n+i}]=-\frac{1}{\left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)},$$

$$[\psi_{n+1},\ \psi_{n+i}]=-\frac{\psi_{n+i}}{\left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)}.$$

Из того, что Z полный интеграл системы (57′) и из способа его составления решением системы (61′) ясно, что уравнение (69) с первыми $n-m$ уравнениями (70), равносильные уравнениям (71) первой строки, равносильны последним $n+1-m$ уравнениям (61′); значит, мы имеем

$$\overline{\Phi}_{m+1}=\psi_{m+1},\ldots,\ \overline{\Phi}_\mu=\psi_\mu,\ \overline{\Phi}_{\mu+1}=\psi_{\mu+1},\ldots,\ \overline{\Phi}_n=\psi_n\ \overline{\Phi}_{n+1}=\psi_{n+1}.$$

Из этого ясно, что первые $\mu-m$ уравнений (71) разрешимы относительно $p_{m+1},\ldots,p_\mu$; основываясь на этом, можно установить, что последние $n-\mu$ уравнений (71) разрешимы относительно $y_{\mu+1},\ldots,y_n$. Действительно, если нахождение $p_{m+1},\ldots,p_\mu$ из первых $\mu-m$ уравнений (71) преобразует их в

$$\overline{\varphi}_{m+1}=0,\ldots,\ \overline{\varphi}_\mu=0,$$

если исключение этих аргументов из уравнений (57′), преобразуют их в

$$(\overline{\varphi}_1)=0,\ldots(\overline{\varphi}_m)=0,$$

а исключение их из левых частей уравнений (71), со значками, большими μ и $n+\mu$, приводит к функциям

$$(\psi_{\mu+1}),\ldots,\ (\psi_n),\ (\psi_{n+1}),\ (\psi_{n+\mu+1}),\ldots,(\psi_{2n}),$$

то эти функции, на основании леммы § 126, образуют независимые решения системы

$$([(\overline{\varphi}_i),\psi])=0,\ (i=1,2,\ldots,m),\ ([\overline{\varphi}_j,\psi])=0,\ (j=m+1,\ldots,\mu)\quad(72)$$

Действительно, на основании теоремы § 122, функции ψ с указанными значками удовлетворяют не только системе (59′), но и системе

$$[\overline{\Phi}_i, \psi] = 0, \qquad (i = m+1, \ldots, \mu)$$

которая равносильна последним $\mu - m$ уравнениям (72).

Из уравнений

$$(\psi_{\mu+1}) = a_{\mu+1}, \ldots, (\psi_n) = a_n, (\psi_{n+\mu}) = a, (\psi_{n+\mu+1}) = \\ = b_{\mu+1}, \ldots, (\psi_{2n}) = b_n, \tag{73}$$

можно найти аргументы

$$q_{\mu+1}, q_{\mu+2}, \ldots, q_n, z, y_{\mu+1}, \ldots, y_n, \tag{74}$$

так как левые части их образуют полное собрание линейно независимых решений системы (72). Но из первых $n - \mu + 1$ уравнений (73) можно найти только первые $n - \mu + 1$ аргументы (74). Значит из последних, после исключения из них этих аргументов, можно найти $y_{\mu+1}, \ldots, y_n$.

Из сказанного ясно, что функции

$$\Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}, \ldots, \Phi_\mu, \overline{\psi}_{n+\mu+1}, \ldots, \overline{\psi}_{2n}, \tag{75}$$

где знак $\overline{\psi}$ обозначает результат обратного преобразования Лежандра, образуют собрание решений системы (59), алгебраически независимых относительно $p_{m+1}, \ldots, p_n$; функции (75) при этом находятся в инволюции так как, как указано,

$$[\psi_i, \psi_{n+j}] \equiv 0 \ (i \neq j), \ [\Phi_i, \overline{\psi}_{n+j}] = \overline{[\psi_i, \psi_{n+j}]} \equiv 0. \tag{76}$$

Остается найти еще одно решение системы (59), находящееся в инволюции с (75), из которого можно было бы найти z.

Вспомним, что, кроме (76), мы имеем

$$[\psi_{n+1}, \psi_{n+i}] = -\frac{\psi_{n+i}}{\left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)}, \ [\psi_i, \psi_{n+i}] = -\frac{1}{\left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)}. \tag{77}$$

Основываясь на этом, легко убедиться, что функция

$$\psi_{n+1} - \psi_{\mu+1}\psi_{n+\mu+1} - \ldots - \psi_n\psi_{2n} = \psi_0 \tag{78}$$

находится в инволюции с функциями

$$\psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \ldots, \psi_\mu, \psi_{n+\mu+1}, \ldots, \psi_{2n}. \tag{79}$$

Относительно первых $\mu - m$ функций (79) это очевидно, так как каждая из них в инволюции со всеми функциями, входящими в состав (78). Далее же

$$[\psi_{n+i}, \psi_{n+1} - \sum_{k=\mu+1}^{k=n} \psi_k\psi_{n+k}] = [\psi_{n+i}, \psi_{n+1}] - \sum_{k=\mu+1}^{k=n} \psi_k[\psi_{n+i}, \psi_{n+k}] + \\ + \sum_{k=\mu+1}^{k=n} \psi_{n+k}[\psi_{n+i}, \psi_k] = \frac{1}{\left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)}[\psi_{n+i} - \psi_{n+i}] \equiv 0.$$

Итак

$$[\psi_i, \psi_0] \equiv 0. \qquad (i = m+1, \ldots, \mu,\ m+\mu+1, \ldots, n)$$

Кроме того, так как ψ_0 функция от решений системы (60′):

$$([\overline{\varphi}_i, \psi_0]) \equiv 0.$$

Возвращаясь к старым переменным, из сказанного заключаем, что функция

$$\overline{\psi}_0 = \Phi_{n+1} - \Phi_{\mu+1}\,\overline{\psi}_{n+\mu+1} - \ldots - \Phi_n\,\overline{\psi}_{2n}$$

решение системы (59) и что

$$[\Phi_i, \overline{\psi}_0] \equiv 0,\ [\overline{\psi}_{n+j}, \overline{\psi}_0] \equiv 0,\ j = \mu+1, \ldots, n. \quad (i = m+1, \ldots, \mu).$$

Возобновляем теперь дважды выполненные рассуждения.

Решая систему

$$\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_m = 0,\ \Phi_{m+1} = 0, \ldots, \Phi_\mu = 0,\ \overline{\psi}_{n+\mu+1} = 0, \ldots,\ \overline{\psi}_{2n} = 0,$$

относительно $p_1, \ldots, p_n$, составляем систему

$$(\varphi_1) = p_1 - (f_1) = 0, \ldots, (\varphi_m) = p_m - (f_m) = 0,$$
$$\varphi_{m+1} = p_{m+1} - f_{m+1} = 0, \ldots,\ \varphi_n = p_n - f_n = 0$$

и соответствующую ей

$$([(\varphi_i), \Phi]) = 0,\ ([\varphi_j, \Phi]) = 0,\ j = m+1, \ldots, n \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Исключение $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из $\overline{\psi}_0$ дает решение этой системы; при этом результат этого исключения не постоянная; иначе переход к новым переменным показал бы, что функции ψ_i не алгебраически независимы. Следовательно $(\overline{\psi}_0)$ зависит от z.

Из всего сказанного вытекает, что функция

$$\Phi_{n+1} - \Phi_{\mu+1}\,\overline{\psi}_{n+\mu+1} - \ldots - \Phi_n\,\overline{\psi}_{2n}$$

есть как раз то решение системы (59), которого нам не доставало. Следовательно, если мы, исключив $p_{m+1}, \ldots, p_n$, найдем z из уравнений

$$\Phi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots,\ \Phi_\mu = a_\mu,\ \overline{\psi}_{n+\mu+1} = b_{\mu+1}, \ldots, \overline{\psi}_{2n} = b_n$$
$$\Phi_{n+1} - \Phi_{\mu+1}\,b_{\mu+1} - \ldots - \Phi_n\,b_n = c,$$

то мы получим полный интеграл системы (57).

133. Нахождение состоящих в инволюции интегралов системы характеристических многообразий. Остается показать, как можно найти собрание функций

$$\Phi_{m+1},\ \Phi_{m+2}, \ldots,\ \Phi_{n+1}, \tag{60}$$

находящихся в инволюции и удовлетворяющих системе

$$([\varphi_i, \Phi]) = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{59}$$

Нахождение их можно выполнять шаг за шагом, основываясь на следующей лемме.

Лемма. *Если система*

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ldots, \varphi_m = p_m - f_m = 0 \tag{57}$$

замкнутая и

$$\Phi_{m+1}, \; \Phi_{m+2}, \ldots, \Phi_l \tag{80}$$

решения системы (59), *находящиеся в инволюции, то система уравнений*

$$([\varphi_i, \; \Phi]) = 0, \; (i = 1, 2, \ldots, m), \; [\Phi_j, \; \Phi] = 0, \; (j = m + 1, \ldots, l) \tag{81}$$

замкнутая.

По заданию, мы имеем

$$([\varphi_i, \Phi_j]) \equiv 0, \; [\Phi_j, \Phi_h] \equiv 0, \qquad (h = m + 1, \ldots, l) \tag{82}$$

Положим

$$X_i(\Phi) = ([\varphi_i, \Phi]), \; Y_j(\Phi) = [\Phi_j, \Phi]. \tag{83}$$

Для доказательства замкнутости системы надо установить, что

$$X_i(X_g(\Phi)) - X_g(X_i(\Phi)), \; Y_j(Y_h(\Phi)) - Y_h(Y_j(\Phi)), \; X_i(Y_j(\Phi)) - \\ - Y_j(X_i(\Phi))$$

равны линейным комбинациям левых частей уравнений системы (81). Для комбинаций первой группы это вытекает из установленной замкнутости системы (59); для комбинаций второй группы это есть следствие задания, по которому функции (80) в инволюции и установлены в § 130.

Остается рассмотреть комбинации последней группы.

Приступая к доказательству, примем во внимание тожества

$$([\varphi_i, \Phi_j]) \equiv [\varphi_i, \Phi_j] - \varphi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}, \; ([\varphi_i \Phi]) \equiv [\varphi_i, \; \Phi] - \varphi_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}, (\varphi_i) \equiv 0 \tag{84}$$

и воспользуемся тожеством § 37. Имеем

$$[\varphi_i, [\Phi_j, \Phi]] + [\Phi_j, [\Phi, \varphi_i]] + [\Phi, [\varphi_i, \Phi_j]] = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} [\Phi_j, \Phi] + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} [\Phi, \varphi_i] + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial z} [\varphi_i, \Phi_j].$$

Пользуясь (84) и тожествами (82), последовательно пишем:

$$[\varphi_i, [\Phi_j, \Phi]] - [\Phi_j, ([\varphi_i, \Phi])] + [\Phi, ([\varphi_i, \Phi_j])] - \left[\Phi_j, \varphi_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] + \\ + \left[\Phi, \varphi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right] = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} [\Phi_j, \Phi] - \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} [\varphi_i, \Phi] + \frac{\partial \Phi}{\partial z} [\varphi_i, \Phi_j]$$

$$[\varphi_i, [\Phi_j, \Phi]] - [\Phi_j, ([\varphi_i, \Phi])] = \varphi_i \left[\Phi_j, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] - \frac{\partial \Phi}{\partial z} [\varphi_i, \Phi_j] - \\ - \varphi_i \left[\Phi, \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right] + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} [\varphi_i, \Phi] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} [\Phi_j, \Phi] - \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} [\varphi_i, \Phi] + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial z} [\varphi_i, \Phi_j] = \varphi_i \left[\Phi_j, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] - \varphi_i \left[\Phi_j, \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right] + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} [\Phi_j, \Phi].$$

Исключая $p_1, \ldots, p_m$, находим

$$([\varphi_i, [\Phi_j, \Phi]]) - [\Phi_j, ([\varphi_i \Phi])] = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right)[\Phi_j, \Phi].$$

Следовательно

$$X_i(Y_j(\Phi)) - Y_j(X_i(\Phi)) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right) Y_j(\Phi),$$

что и требовалось доказать.

Основываясь на доказанной лемме, можно следующим образом вести нахождение функций (60). Найдя одно решение Φ_{m+1} системы (59), можно присоединить к системе уравнение

$$[\Phi_{m+1}, \Phi] = 0$$

и искать решение Φ_{m+2} новой системы. После его нахождения присоединить к системе уравнение

$$[\Phi_{m+2}, \Phi] = 0$$

и искать решение Φ_{m+3} новой системы и продолжать так далее, пока не будут найдены все функции (60).

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

О ПОЛНОМ ИНТЕГРАЛЕ С. ЛИ.

134. Интеграл $M^{(n)}$. Положим, что дана система уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (1)$$

замкнутая или нет.

Предположим сначала, что она разрешима относительно некоторых из производных и может быть заменена, например, системой

$$\varphi_i = p_i - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0. \ (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (2)$$

Согласно с определением, данным в § 116, интегралом $M^{(n)}$ системы (1) называется совокупность значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \ p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad (3)$$

если они образуют многообразие n измерений, удовлетворяют уравнениям (1) и, сверх того, связаны зависимостью

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n. \quad (4)$$

Чтобы задать интеграл $M^{(n)}$, надо или задать аргументы (3) в функции от n параметров, или связать эти аргументы, число которых $2n+1$, $n+1$ алгебраически независимыми уравнениями, оставляя возможность выбирать за параметры некоторые n из аргументов (3).

Выбирая последний способ задания, положим, что интеграл $M^{(n)}$ задан уравнениями

$$\omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1) \quad (5)$$

и сделаем несколько замечаний о характере уравнений (5).

1) Исключая из уравнений (5) аргументы $p_1, \ldots, p_n$, мы можем получить одну или несколько зависимостей, связывающих аргументы $z, x_1, \ldots, x_n$. Среди этих зависимостей по крайней мере одна содержит z. В противном случае, в число произвольных параметров, определяющих $M^{(n)}$, вместе с некоторыми из $p_1, p_2, \ldots, p_n$ мы должны были бы включить и z и из уравнения (4), приравнивая друг другу коэффициенты при дифференциалах произвольных параметров, мы получили бы, так как, при сделанном предположении

$$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$$

от dz не зависят, что

$$dz = 0,$$

т. е., что z постоянное, что противоречит сделанному предположению о независимости z. Итак, одно из уравнений (5) всегда может быть заменено уравнением вида

$$z = \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{6}$$

2) Если среди уравнений (5) только одно (6) не зависит от $p_1, \ldots, p_n$, то вследствие (4)

$$p_1 = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_n}$$

и (6) дает решение системы (1).

3) Если исключение из уравнений (5) аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ приводит к нескольким уравнениям, не зависящим от этих аргументов, и если они могут быть решены относительно

$$z, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{\mu+1},$$

будучи заменены уравнениями

$$\left.\begin{aligned} z &= \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_\mu) \\ x_{\mu+1} &= \vartheta_{\mu+1}(x_1, x_2 \ldots, x_\mu) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \vartheta_n(x_1, x_2, \ldots, x_\mu), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

то остальные уравнения (5) могут быть решены относительно $p_1, p_2, \ldots p_\mu$. Действительно, пользуясь (4) и сравнивая коэффициенты при dx_i, $i = 1, \ldots, \mu$, получаем

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = p_i + \frac{\partial \vartheta_{\mu+1}}{\partial x_i} p_{\mu+1} + \ldots + \frac{\partial \vartheta_n}{\partial x_i} p_n. \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{8}$$

За параметры, определяющие интеграл $M^{(n)}$, в этом случае можно взять

$$x_1, x_2, \ldots, x_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_n.$$

Так как на основании уравнений (2) $p_1, p_2, \ldots, p_m$ определены, когда заданы другие аргументы, всегда можно распорядиться так, чтобы $p_1, \ldots, p_m$ не были в числе параметров, определяющих $M^{(n)}$.

4) Если, решая уравнения (5) относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, мы можем найти только $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, составив уравнения

$$p_1 = \psi_1,\ p_2 = \psi_2, \ldots, p_\mu = \psi_\mu,$$

то уравнения, получившиеся из (5) исключением $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, могут быть решены, кроме z, относительно $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.

Действительно, уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial\vartheta}{\partial x_n} dx_n = \psi_1\ dx_1 + \ldots + \psi_\mu dx_\mu + \\ + p_{\mu+1}\ dx_{\mu+1} + \ldots + p_n dx_n, \tag{4'}$$

причем $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$ остаются произвольными. Дифференцируя по $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$, получаем тожества вида

$$dx_j + A_1^{(j)} dx_1 + \ldots + A_\mu^{(j)} dx_\mu = 0. \qquad (j = \mu + 1, \ldots, n)$$

Если из указанных уравнений нельзя найти x_j, то $dx_1, \ldots, dx_\mu$, найденные при помощи них, от dx_j не зависят и из написанного тожества вытекает, что $dx_j = 0$, т. е. что $x_j = \text{const}$, тогда как она должна была бы быть произвольным параметром.

135. Полный интеграл $M^{(n)}$. Положим, что кроме аргументов (3) уравнения (5) зависят от $n - m + 1$ параметров

$$a_{m+1},\ a_{m+2}, \ldots, a, \tag{9}$$

имея вид

$$\omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) = 0, (i = 1, 2, \ldots, n, n+1) \tag{5'}$$

и что исключение из уравнений (5′) параметров (9) дает систему уравнений, связывающих аргументы (3) и равносильную системе (1). Тогда интеграл $M^{(n)}$ мы назовем полным интегралом $M^{(n)}$ или *полным интегралом С. Ли.*

Сделаем о полном интеграле $M^{(n)}$ несколько замечаний.

1) Считая систему (1) преобразованной в систему (2), мы можем из уравнений (5′) откинуть те, которые получаются исключением параметров (9), присоединяя уравнения (2) к уравнениям, определяющим полный интеграл $M^{(n)}$; тогда остальным уравнениям можно дать вид

$$\Omega_i(x_1, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) = 0. \\ (i = m + 1, \ldots, n, n + 1) \tag{10}$$

Уравнения (10) должны быть алгебраически независимы относительно параметров (9). Решая их относительно этих параметров, дадим им вид:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_{m+1}(x_1, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = a_{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n) = a. \end{array}\right\} \tag{11}$$

2) Исключая из $n-m+1$ уравнений (10), $n-m$ аргументов $p_{m+1},\ldots,p_n$, мы получим одно или несколько соотношений, не зависящих от $p_{n+1},\ldots,p_n$, причем на основании замечания (1) прошлого параграфа, одно из этих соотношений разрешимо относительно z. Если таких соотношений только одно, и

$$z=\vartheta(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ a_{m+1},\ldots,a_n,\ a),\tag{12}$$

то z полный интеграл Лагранжа системы (1). Действительно, так как существует только одно соотношение, не заключающее $p_1,\ldots,p_n$, все эти аргументы могут быть найдены и уравнения (11) разрешимы относительно $p_{m+1},\ldots,p_n$. Далее, по сказанному в прошлом параграфе, z данное равенством (12) решение системы; формулы (8) прошлого параграфа имеют вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}=p_i;\qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n)\tag{8'}$$

наконец, z зависит от всех параметров (9), иначе уравнения (12) и (8′) заменяющие (11) и образующие вместе с (2) интеграл $M^{(n)}$ зависели бы от меньшего числа параметров и интеграл $M^{(n)}$ не был бы полным.

Когда мы имеем дело с рассматриваемым случаем, система (1) замкнутая. Если бы она не была замкнутой, то, составляя скобки Якоби, мы нашли бы еще одну зависимость, не заключающую параметров (9), но которой удовлетворяла бы z и которая, не будучи следствием уравнений (2), была бы следствием уравнений (11), чего быть не может, так как исключение параметров (9) из (11) невозможно.

3) Далее из сказанного в прошлом параграфе ясно, что полному интегралу $M^{(n)}$ можно, выписывая уравнения (2) и находя сколько можно производных $p_1,\ldots,p_n$, дать во всех случаях вид:

$$\left.\begin{array}{c}p_1=f_1,\ldots,\ p_m=f_m\\ p_{m+1}=f_{m+1},\ldots,p_\mu=f_\mu\\ x_{\mu+1}=\vartheta_{\mu+1},\ldots,x_n=\vartheta_n\\ z=\vartheta,\end{array}\right\}\tag{13}$$

где правые части в последних двух строках зависят только от

$$x_1,x_2,\ldots,x_\mu.$$

Выполним теперь подстановку Лежандра, положив

$$\begin{gathered}p_{\mu+1}=y_{\mu+1},\ldots,\ p_n=y_n,\ x_{\mu+1}=-q_{\mu+1},\ldots,\ x_n=-q_n\\ Z=z-x_{\mu+1}\,p_{\mu+1}-\ldots-x_n\,p_n,\ z=Z-y_{\mu+1}\,q_{\mu+1}-\ldots-y_n\,q_n.\end{gathered}\tag{14}$$

Мы преобразуем уравнения (13) в уравнения

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \bar{f}_1, \ldots, p_m = \bar{f}_m \\ p_{m+1} &= \bar{f}_{m+1}, \ldots, p_\mu = \bar{f}_\mu \\ q_{\mu+1} &= -\vartheta_{\mu+1}, \ldots, q_n = -\vartheta_n \\ Z &= -y_{\mu+1}\vartheta_{\mu+1} - \ldots - y_n\vartheta_n + \vartheta = \bar{V}. \end{aligned}\right\} \quad (13')$$

Собрание аргументов

$$p_1, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_\mu, q_{\mu+1}, \ldots, q_n, x_1, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, \ldots, y_n, Z \quad (3')$$

снова образует полный интеграл системы из уравнений первой строки. Но теперь мы находимся в условиях случая второго и, значит, эта система, а с нею вместе и система (1), замкнуты.

Сказанное в пунктах (2) и (3) приводит к заключению: если в соответствие системе (1) можно привести некоторый полный интеграл $M^{(n)}$, то система (1) замкнута.

Функция Z, данная последним уравнением (13′), зависит от всех параметров (9); иначе, так как

$$p_i = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_i}, (i = m+1, \ldots, \mu), \quad q_j = \frac{\partial \bar{V}}{\partial y_j}, \qquad (j = \mu+1, \ldots, n)$$

элементы интеграла (13′) не зависели бы от некоторых из них.

4. Решиим уравнения (13) последних трех строк относительно аргументов (9) и дадим им вид

$$\psi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \psi_n = a_n, \psi_{n+1} = c, \quad (11)$$

где

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n, p_{m+1}, \ldots, p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z).$$

После решения относительно аргументов (9) уравнений (13′) последних трех строк мы, очевидно, получим систему

$$\bar{\psi}_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \bar{\psi}_n = a_n, \bar{\psi}_{n+1} = a. \quad (11')$$

Вспомним теперь теорему § 122. Составив уравнения

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial a} b_{m+1} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial a_{m+1}} = 0, \ldots, \frac{\partial \bar{V}}{\partial a} b_n + \frac{\partial \bar{V}}{\partial a_n} = 0,$$

где

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial a_s} = \frac{\partial \vartheta}{\partial a_s} - y_{\mu+1}\frac{\partial \vartheta_{\mu+1}}{\partial a_s} - \ldots - y_n \frac{\partial \vartheta_n}{\partial a_s},$$

решая их относительно $b_{m+1}, \ldots, b_n$ и исключая из полученных уравнений $a_{m+1}, \ldots, a_n, a$ при помощи уравнений (11), мы преобразуем их в уравнения

$$\bar{\psi}_{n+m+1} = b_{m+1}, \ldots, \bar{\psi}_{2n} = b_n. \quad (11_1)$$

Функции ($11'$) и (11_1) связаны соотношениями:

$$[\bar\psi_i, \bar\psi_j] \equiv 0,\ [\bar\psi_{n+1}, \bar\psi_j] \equiv 0,\ [\bar\psi_i, \bar\psi_{n+j}] \equiv 0, \qquad (i \neq j) \quad (15)$$

$$[\bar\psi_i, \bar\psi_{n+i}] \equiv -\frac{1}{\left(\frac{\partial \bar V}{\partial a}\right)},\ [\bar\psi_{n+1}, \bar\psi_{n+i}] \equiv -\frac{\bar\psi_{n+i}}{\left(\frac{\partial \bar V}{\partial a}\right)},\ [\bar\psi_{n+i}, \bar\psi_{n+j}] \equiv 0,$$

в которых знак $\left(\frac{\partial \bar V}{\partial a}\right)$ обозначает результат исключения параметров (9) при помощи уравнений ($11'$).

Кроме того, скобки

$$[\bar F_i, \bar\psi_i],\ [\bar F_i, \bar\psi_{n+i}]$$

обращаются в нуль на основании уравнений ($13'$) первой строки; последнее вытекает из формул § 126 вследствие тожеств $([\bar\varphi, \bar\psi]) \equiv 0$.

Возвращаясь к старым переменным и обозначая через ψ_{n+j} функции, получаемые из $\bar\psi_{n+j}$, заключаем, что справедливы тожества

$$[\psi_i, \psi_j] \equiv 0,\ [\psi_{n+1}, \psi_j] \equiv 0,\ [\psi_i, \psi_{n+j}] \equiv 0, \qquad (i \neq j)$$

$$(\psi_i, \psi_{n+i}] \equiv -\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)},\ [\psi_{n+1}, \psi_{n+i}] \equiv -\frac{\psi_{n+i}}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)},\ [\psi_{n+i}, \psi_{n+j}] \equiv 0 \quad (15_1)$$

и скобки

$$[F_i, \psi_i],\ [F_i, \psi_{n+j}]$$

обращаются в нуль на основании уравнений (13) первой строки.

Здесь

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial \vartheta}{\partial a} - p_{\mu+1} \frac{\partial \vartheta_{\mu+1}}{\partial a} - \ldots - p_n \frac{\partial \vartheta_k}{\partial a}$$

и функции ψ_{n+j} получаются из уравнений

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial a} - p_{\mu+1} \frac{\partial \vartheta_{\mu+1}}{\partial a} - \ldots - p_n \frac{\partial \vartheta_n}{\partial a}\right) b_j +$$
$$+ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial a_j} - p_{\mu+1} \frac{\partial \vartheta_{\mu+1}}{\partial a_j} - \ldots - p_n \frac{\partial \vartheta_n}{\partial a_j}\right) = 0$$

решением их относительно $b_{m+1}, \ldots, b_n$ и исключением параметров (9) при помощи уравнений (11).

Так как уравнения (11_1) разрешимы относительно

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, \ldots, y_n,$$

решая уравнения

$$\psi_{n+m+1} = b_{m+1}, \ldots, \psi_{2n} = b_n,$$

мы присоединяем аргументы $x_{m+1}, \ldots, x_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_n$ к аргументам, данным уравнениями (13), выразив всех их через $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

136. Условие, что данное $M^{(n)}$ полный интеграл. Из сказанного в прошлом параграфе вытекает, что если уравнения (11) по присоединении к системе (1) образуют ее полный интеграл $M^{(n)}$, то 1) система (1) замкнута, 2) уравнения (11) алгебраически независимы и 3) справедливы соотношения

$$[\psi_i, \psi_j] \equiv 0, \qquad (i, j = m+1, \ldots, n, n+1)$$

и 4) скобки $[F_i, \psi_j]$ обращаются в нуль на основании уравнений системы (1).

Не трудно убедиться, что указанные четыре необходимые условия также и достаточны. Из условия (4) вытекает на основании леммы § 126, что функции ψ_i образуют решения системы

$$([\varphi_l, \Phi]) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} + p_l \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \sum_{k=n+1}^{k=n} \left[\frac{\partial \varphi_l}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \frac{d\varphi_l}{dx_k} \right] = 0;$$

функции ψ_i, именно, от $p_1, p_2, \ldots, p_m$ не зависят.

Так как система (1) замкнута, уравнения (11) алгебраически независимы в инволюции, то мы находимся в условиях § 132. Преобразовав систему из уравнений (1) и (11) в (13), а затем, при помощи подстановки (14), в уравнения (13'), мы составим полный интеграл Лагранжа преобразованной системы; тожество

$$dZ = p_1 dx_1 + \ldots + p_\mu dx_\mu + q_{\mu+1} dy_{\mu+1} + \ldots + q_n dy_n$$

после обратного преобразования обращается в

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_\mu dx_\mu + p_{\mu+1} dx_{\mu+1} + \ldots + p_n dx_n,$$

откуда вытекает, что уравнения (1) и (11) действительно определяют полный интеграл $M^{(n)}$ системы (1).

Мы уже имели дело с полным интегралом $M^{(n)}$ в § 132, рассматривая исключительный случай второй методы Якоби.

Основываясь на теореме § 132 и на только что доказанном, мы можем утверждать: если

$$z = V(x_1, x_2 \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \tag{16}$$

полный интеграл Лагранжа системы (2) и если уравнения

$$\Phi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \Phi_n = a_n, \Phi_{n+1} = a$$

получены решением уравнения (16) и уравнений

$$p_{m+1} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \ldots, p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}, \tag{16'}$$

относительно $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n, a$, а функции

$$\Phi_{n+m+1}, \ldots, \Phi_{2n},$$

исключением $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\, a$ из отношений

$$-\frac{\partial V}{\partial a_{m+1}} : \frac{\partial V}{\partial a}, \ldots, -\frac{\partial V}{\partial a_n} : \frac{\partial V}{\partial a},$$

то мы получим полный интеграл $M^{(n)}$ системы (1), взяв за функции ψ в (11) некоторые μ функций первой строки таблицы

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c} \Phi_{m+1} & \Phi_{m+2} & \ldots\ldots & \Phi_n \\ \Phi_{n+m+1} & \Phi_{n+m+2} & \ldots\ldots & \Phi_{2n} \end{array} \right|, \tag{17}$$

$n-m-\mu$ функций второй строки, не находящихся под взятыми из первой, и функцию

$$\Phi_{n+1} - \sum \Phi_i \Phi_{n+i}, \tag{17$_1$}$$

в которой суммирование распространено по функциям, взятым из второй строки таблицы (17).

Конечно, не всякий такой полный интеграл $M^{(n)}$ будет интегралом С. Ли; даже, вообще говоря, он будет интегралом Лагранжа. Применяя сказанное к полному интегралу Лагранжа, выписанному в последней строке (13'), мы получим различные полные интегралы $M^{(n)}$ преобразованной системы (2). Возвращаясь к старым аргументам (3), мы таким образом восстановим данный нам интеграл С. Ли, но составим и другие полные интегралы $M^{(n)}$.

137. Нахождение полного интеграла Лагранжа по полному интегралу $M^{(n)}$. Сказанное в § 132 позволяет находить по полному интегралу $M^{(n)}$ интеграл Лагранжа.

Положим, что дан полный интеграл (5') замкнутой системы

$$\varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ \ldots, \ \varphi_m = p_m - f_m = 0. \tag{2}$$

Исключая из (5') аргументы $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и решая полученные уравнения относительно параметров (9), мы получим данный $M^{(n)}$ в виде собрания уравнений (2) и присоединенных к ним уравнений

$$\psi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \ \psi_n = a_n, \ \psi_{n+1} = a_{n+1}. \tag{11}$$

Сохраняя обозначения § 135, положим, что из уравнений (11) могут быть найдены $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_\mu$, причем для этого достаточно использовать уравнения

$$\psi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \psi_\mu = a_\mu. \tag{18}$$

Положим, что решая уравнения (18), мы получим уравнения

$$\varphi_{m+1} = p_{m+1} - f_{m+1} = 0, \ldots, \ \varphi_\mu = p_\mu - f_m = 0, \tag{19}$$

образующие вторую строку уравнений (13).

Из остальных уравнений (11) могут быть найдены $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$, z и составлены уравнения

$$x_{\mu+1} = \vartheta_{\mu+1}, \ldots, x_n = \vartheta_n, \quad z = \vartheta, \tag{20}$$

образующие последние две строки уравнений (13).

Присоединяем к уравнениям (18) уравнения

$$\psi_{n+\mu+1} = b_{\mu+1}, \ldots, \psi_{2n} = b_n, \tag{21}$$

в которых ψ_{n+j} получены из

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial a} - p_{\mu+1}\frac{\partial\vartheta_{\mu+1}}{\partial a} - \ldots - p_n\frac{\partial\vartheta_n}{\partial a}\right) b_j + \\ + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial a_j} - p_{\mu+1}\frac{\partial\vartheta_{\mu+1}}{\partial a_j} - \ldots - p_n\frac{\partial\vartheta_n}{\partial a_j}\right) = 0$$

решением относительно b_j и исключением параметров (9) при помощи уравнений (11). По формулам § 135

$$\left.\begin{array}{lll}[\psi_i, \psi_{i_1}] \equiv 0, & [\psi_i, \psi_{n+j}] \equiv 0, & (i, i_1 = m+1, \ldots, \mu) \\ & [\psi_{n+j}, \psi_{n+j_1}] \equiv 0, & (j = \mu+1, \ldots, n)\end{array}\right\} \tag{22}$$

Кроме того,

$$[\varphi_h, \psi_g], \quad [\varphi_h, \psi_{n+j}] \quad (h = 1, 2, \ldots, m, \ g = m+1, \ldots, n) \tag{22'}$$

обращаются в нуль на основании уравнений (2) и

$$[\psi_g, \psi_{g_1}] \equiv 0.$$

Рассматриваем систему из уравнений (2) и (19), исключив из уравнений системы (2) $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$, данные уравнениями системы (19). Пользуясь леммой § 126, заключаем на основании формул (22) и сказанного о (22′), что полученная система замкнута. Обозначая знаком (ψ), (f) результат исключения аргументов $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$ из функций ψ и f, на основании той же леммы и пользуясь тем же, заключаем, что

$$[(\varphi_h), (\psi_g)], \quad [(\varphi_h), (\psi_{n+g})], \quad (h = 1, 2, \ldots, \mu, \ g = \mu+1, \ldots, n)$$

обращаются в нуль на основании уравнений системы (2) и (19), т. е., что

$$(\psi_{\mu+1}), \ldots, (\psi_n), (\psi_{n+1}), (\psi_{n+\mu+1}), \ldots, (\psi_{2n}) \tag{23}$$

образуют решения системы из μ уравнений

$$([(\varphi_h), \Phi]) = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{24}$$

где, как в § 132

$$([(\varphi_h), \Phi]) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_h} + (f_h)\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \\ + \sum_{k=\mu+1}^{k=n} \frac{\partial(\varphi_h)}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial p_k}\frac{d(\varphi_h)}{dx_k}\Big).$$

Функции (23) образуют независимые решения указанной системы и, значит, разрешимы относительно

$$x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_n.$$

Но уравнения

$$(\psi_{\mu+1}) = a_{\mu+1}, \ldots, (\psi_{n+1}) = a,$$

будучи равносильны уравнениям (20), от $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_n$ не зависят. Значит, уравнения (21) разрешимы относительно $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_n$ и вместе с уравнениями (2) и (18) дают все аргументы p.

Применяя теперь не использованные формулы (22_1) и рассуждения § 132, основанные на этих формулах, мы можем убедиться, что функция

$$\psi_{n+1} - \psi_{\mu+1}\psi_{n+\mu+1} - \ldots - \psi_n\psi_{2n}$$

также решение системы (24) и находится в инволюции с левыми частями уравнений (18) и (21). Отсюда вытекает, что искомый интеграл Лангранжа получается исключением $p_{m+1}, \ldots, p_n$ при помощи уравнений (18) и (21) из уравнения

$$\psi_{n+1} - b_{\mu+1}\psi_{\mu+1} - \ldots - b_n\psi_n = c.$$

Пример. Дана система

$$2x_1(1 - p_1x_3) - p_3x_3^2 = 0, \quad 2x_2(1 - p_2x_4) - p_4x_4^2 = 0 \tag{25}$$

и известен ее полный интеграл $M^{(4)}$.

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \frac{1}{2}a_3x_3^2, \quad p_3 = a_3(1 - p_1x_3) & \\ & z = a_3x_3 + a_4x_4 + b. \\ x_2 = \frac{1}{2}a_4x_4^2, \quad p_4 = a_4(1 - p_4x_4) & \end{array}\right\} \tag{26}$$

Трактуя систему как решенную относительно p_3 и p_4, даем полному интегралу вид уравнений (25), соединенных с уравнениями

$$\frac{2x_1}{x_3^2} = a_3, \quad \frac{2x_2}{x_4^2} = a_4, \quad z - \frac{2x_1}{x_3} - \frac{2x_2}{x_4} = b. \tag{27}$$

Выполнив подстановку Лежандра

$$Z = z - p_1x_1 - p_2x_2, \quad z = Z - q_1y_1 - q_2y_2, \quad p_1 = y_1, \quad p_2 = y_2,$$
$$x_1 = -q_1, \quad x_2 = -q_2,$$

мы дадим уравнениям (27) вид

$$-\frac{2q_1}{x_3^2} = a_3, \quad -\frac{2q_2}{x_4^2} = a_4, \quad Z - q_1y_1 - q_2y_2 + \frac{2q_1}{x_3} + \frac{2q_2}{x_4} = b \tag{28}$$

и исключая из последнего уравнения (28) q_1 и q_2, найдем полный интеграл преобразованного уравнения

$$Z = -\frac{1}{2}a_3x_3^2y_1 - \frac{1}{2}a_4x_4^2y_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b.$$

Составляя уравнения характеристического многообразия C_4, присоединяем к (28) уравнения

$$b_3 = \frac{1}{2} x_3^2 y_1 - x_3, \qquad b_4 = \frac{1}{2} x_4^2 y_2 - x_4;$$

возвращаясь назад к старым переменным, мы должны к уравнениям (27) присоединить уравнения

$$\frac{1}{2} x_3^2 p_1 - x_3 = b_3, \qquad \frac{1}{2} x_4^2 p_2 - x_4 = b_4$$

и уравнение

$$z - \frac{2x_1}{x_3} - \frac{2x_2}{x_4} - b_3 \frac{2x_1}{x_3^2} - b_4 \frac{2x_2}{x_4^2} = b.$$

Последнее уравнение, так как из него не приходится исключать p_1 и p_2, дает полный интеграл системы (25).

138. Некоторые обобщения. Откинем теперь условие, по которому из уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \; (1)$$

могут быть найдены аргументы $p_1, \ldots, p_m$.

Присоединим к уравнениям (1) $n - m + 1$ уравнений алгебраически независимых между собою и с уравнениями (1) относительно аргументов

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad (3)$$

но зависящих от параметров

$$a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n, a. \quad (9)$$

Положим, что:

$$\psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = a_j, \quad (j = m+1, \ldots, n, n+1) \; (29)$$

эти уравнения.

При этом будем считать, что многообразие n измерений, определенное уравнениями (1) и (29), образует интеграл $M^{(n)}$, т. е., что аргументы (3) удовлетворяют зависимости

$$dz = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n. \quad (4)$$

В этом случае мы назовем многообразие $M^{(n)}$ полным интегралом системы (1). Замечания (1), (3) и (4) § 134 справедливы для взятого многообразия; при их выводе было использовано только условие (4). Мы не исключаем случая, в котором уравнения (1) и (29) от $p_1, p_2, \ldots, p_n$ не зависят. Положим, что отыскивая из (1) аргументы $p_1, \ldots, p_n$, мы можем найти ν и только ν из них $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, не исключая случая когда $\nu = 0$. После выделения уравнений, дающих эти аргументы, и исключения этих аргументов из остальных уравнений (1) останутся $m - \nu$ уравнений, связывающих только

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, z. \quad (3')$$

Обратимся после этого к уравнениям (29) и найдем из них столько аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, сколько можно; положим, что мы найдем таким образом $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_\mu$ (мы докажем, что $n+1-m$ аргументов p из них найти нельзя) и, исключив их из остальных уравнений, получим снова уравнения, зависящие только от аргументов (3′); мы считаем $\mu = m$, если уравнения (29) не зависят от p_l; по сказанному в замечании (4), из оставшихся уравнений (1) и (29) можно найти $n+m-\mu-\nu+1$ аргументов

$$x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_m, \ x_{\mu+1}, \ldots, x_n, \ z.$$

Обращаемся к оставшимся уравнениям (1). Мыслимы два случая: или эти уравнения не зависят от z и из них можно найти $m-\nu$ из аргументов $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n$, скажем $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_m$ или из одного из них можно найти z, находя из других $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_{m-1}$. Мы рассмотрим порознь эти два случая.

139. Первый случай обобщенной системы. В этом случае системе (1) можно дать вид:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ldots, \varphi_\nu = p_\nu - f_\nu = 0, \\ \varphi_{\nu+1} = x_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+1} = 0, \ldots, \varphi_m = x_m - \vartheta_m = 0, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ x_{m+1}, \ldots, x_n, \ p_{\nu+1}, \ldots, p_m, \ p_{m+1}, \ldots, p_n, \ z)$$
$$\vartheta = \vartheta(x_1, x_2 \ldots, x_\nu, \ x_{m+1}, \ldots, x_n);$$

а уравнения (29) заменить уравнениями

$$\psi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \psi_n = a_n, \ \psi_{n+1} = a, \tag{29′}$$

в которых

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ x_{m+1}, \ldots, x_n, \ p_{\nu+1}, \ldots, p_m, \ p_{m+1}, \ldots, p_n, \ z).$$

Выполним теперь подстановку Лежандра, положив

$$p_{\nu+1} = y_{\nu+1}, \ldots, p_m = y_m, \ x_{\nu+1} = -q_{\nu+1}, \ldots, x_m = -q_m$$
$$Z = z - x_{\nu+1} p_{\nu+1} - \ldots - x_m p_m, \ z = Z - y_{\nu+1} q_{\nu+1} - \ldots - y_m q_m.$$

Мы заменим систему (30) системой

$$\left.\begin{aligned} \overline{\varphi}_1 = p_1 - \overline{f}_1 = 0, \ldots, \overline{\varphi}_\nu = p_\nu - \overline{f}_\nu = 0, \\ \overline{\varphi}_{\nu+1} = -q_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+1} = 0, \ldots, \overline{\varphi}_m = -q_m - \vartheta_m = 0, \end{aligned}\right\} \tag{30′}$$

в которой члены, зависящие от $q_{\nu+1}, \ldots, q_m$ выписаны явно, и попадем в условия § 135. Положим, что уравнения (29′) обращаются в

$$\overline{\psi}_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \overline{\psi}_n = a_n, \ \overline{\psi}_{n+1} = a \tag{29$_1$}$$

и что из них могут быть найдены $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_\mu$ и только эти аргументы p; что решение оставшихся уравнений (29_1) дает

$$x_{\mu+1} = \overline{\vartheta}_{\mu+1}, \ldots, x_n = \overline{\vartheta}_n, \quad Z = \overline{\vartheta},$$

где $\overline{\vartheta_{\mu+1}}, \ldots, \overline{\vartheta_n}$, $\overline{\vartheta}$ зависят только от $x_1, \ldots, x_\nu$, $y_{\nu+1}, \ldots, y_m$, $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$.

Руководствуясь сказанным в § 135, составим уравнения

$$\overline{\psi}_{n+m+1} = b_{m+1}, \ldots, \overline{\psi}_{2n} = b_n, \tag{31}$$

в которых уравнение $\overline{\psi}_{n+j} = b_j$ получается из

$$\left(\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial a} - p_{\mu+1}\frac{\partial\overline{\vartheta}_{\mu+1}}{\partial a} - \ldots - p_n\frac{\partial\overline{\vartheta}_n}{\partial a}\right) b_j +$$
$$+ \left(\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial a_j} - p_{\mu+1}\frac{\partial\overline{\vartheta_{\mu+1}}}{\partial a_j} - \ldots - p_n\frac{\partial\overline{\vartheta}_n}{\partial a_j}\right) = 0$$

решением относительно b_j и исключением параметров (9) при помощи уравнений (29_1).

Будут справедливы тожества:

$$\left.\begin{aligned} &[\overline{\psi}_i, \overline{\psi}_j] \equiv 0,\ [\overline{\psi}_{n+1}, \overline{\psi}_j] \equiv 0,\ [\overline{\psi}_i, \overline{\psi}_{n+j}] \equiv 0,\ (i \neq j) \\ &[\overline{\psi}_i, \overline{\psi}_{n+i}] \equiv \overline{\rho},\ [\overline{\psi}_{n+1}, \overline{\psi}_{n+i}] = \rho\overline{\psi}_{n+i},\ [\overline{\psi}_{n+i}, \overline{\psi}_{n+j}] \equiv 0, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

где ρ некоторая функция, и скобки

$$[\overline{F}_i, \overline{\psi}_i]; \quad [\overline{F}_i, \overline{\psi_{n+j}}] \tag{32_1}$$

будут обращаться в нуль на основании уравнения (30′).

Возвращение к старым переменным приводит к тожествам, получаемым из (32) откидыванием черты наверху; функция ψ_{n+j} получается из

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial a} - p_{\mu+1}\frac{\partial\vartheta_{\mu+1}}{\partial a} - \ldots - p_n\frac{\partial\vartheta_n}{\partial a}\right) b_j +$$
$$+ \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial a_j} - p_{\mu+1}\frac{\partial\vartheta_{\mu+1}}{\partial a_j} - \ldots - p_n\frac{\partial\vartheta_n}{\partial a_j}\right) = 0$$

нахождением b_j и исключением параметров (9). Функции ϑ, $\vartheta_{\mu+1}, \vartheta_{\mu+2} \ldots, \vartheta_n$ получаются из уравнений (29′) исключением из них аргументов p и решением оставшихся уравнений относительно $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n, z$. Так как из уравнений (30) и (29′) могут быть найдены $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, $x_{\nu+1}, \ldots, x_m$, $p_{m+1}, \ldots, p_\mu$, $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$, z из уравнений

$$\psi_{n+m+1} = b_{m+1}, \ldots, \psi_{2n} = b_n, \tag{31′}$$

могут быть найдены $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_\mu$, $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$ и все выражены через $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, $p_{\nu+1}, \ldots, p_m$.

Обратно, основываясь на сказанном в § 136, можно установить, что 1) если система (1) замкнута и преобразуется в систему (30), 2) если уравнения системы (29′) алгебраически независимы, 3) если соблюдены тожества

$$[\psi_i, \psi_j] \equiv 0, \ (i, j = m+1, \ldots, n, n+1)$$

и 4) если скобки

$$[F_h, \psi_j], \qquad (h = 1, 2 \ldots, m)$$

обращаются в нуль на основании уравнений (1), то уравнения (1) и (29′) определяют полный интеграл системы (1). Действительно, преобразование Лежандра, преобразующее систему (30) в (30′), преобразует скобки $[\psi_i, \psi_j]$, $[F_h, \psi_j]$ в скобки $[\overline{\psi_i}, \overline{\psi_j}]$, $[\overline{F_h}, \overline{\psi_j}]$.

Отсюда вытекает по сказанному в § 136, что уравнения (30′) вместе с уравнениями (29_1) образуют полный интеграл системы (30′), т. е. что справедливо тожество

$$dZ = p_1 dx_1 + \ldots + p_1 dx_\nu + q_{\nu+1} dx_{\nu+1} + \ldots + q_m dx_m + \\ + p_{m+1} dx_{n+1} + \ldots + p_n dx_n,$$

откуда вытекает, что тожество

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$$

также справедливо.

140. Второй случай обобщенной системы. В этом случае систему (1) можно заменить системой

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ldots, \varphi_\nu = p_\nu - f_\nu = 0, \\ \varphi_{\nu+1} = x_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+1} = 0, \ldots, \varphi_{m-1} = x_{m-1} - \vartheta_{m-1} = 0 \\ \varphi_0 = z - \vartheta = 0, \end{array}\right\} \quad (33)$$

в которой

$$\vartheta_i = \vartheta_i(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$
$$\vartheta_i = \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$
$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, p_{\nu+1}, \ldots, p_{m-1}, p_m, \ldots, p_n).$$

Выполнив подстановку Лежандра

$$p_{\nu+1} = y_{\nu+1}, \ldots, p_{m-1} = y_{m-1}, \ x_{\nu+1} = -q_{\nu+1}, \ldots, x_{m-1} = -q_{m-1}$$
$$Z = z - x_{\nu+1} p_{\nu+1} - \ldots - x_{m-1} p_{m-1},$$
$$z = Z - y_{\nu+1} q_{\nu+1} - \ldots - y_{m-1} q_{m-1},$$

мы заменим систему (33) системой

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\varphi_1} = p_1 - \overline{f_1} = 0, \ldots, \overline{\varphi_\nu} = p_\nu - \overline{f_\nu} = 0, \\ \overline{\varphi}_{\nu+1} = -_{\iota\nu+1} - \vartheta_{\nu+1} = 0, \ldots, \overline{\varphi}_{m-1} = -q_{m-1} - \vartheta_{m-1} = 0 \\ Z = y_{\nu+1} q_{\nu+1} + \ldots + y_{m-1} q_{m-1} + \vartheta \end{array}\right\} \quad (33')$$

в которой $\overline{f}$, ϑ не зависят от $q_{\nu+1}, \ldots, q_{m-1}$.

Последнему уравнению системы можно дать вид

$$\left.\begin{aligned} &Z = -\vartheta_{\nu+1}\, y_{\nu+1} - \ldots - \vartheta_{m-1}\, y_{m-1} + \vartheta = \overline{\vartheta_0} \\ &\text{или} \\ &\overline{\varphi_0} = Z - \overline{\vartheta_0} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Уравнения, зависящие от аргументов (9):

$$\psi_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, \psi_n = a_n, \ \psi_{n+1} = a, \qquad (35)$$

в которых теперь

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ x_m, \ x_{m+1}, \ldots, x_n, \ p_{\nu+1}, \ldots, p_{m-1}, \ p_m, \ldots, p_n),$$

обратятся в уравнения

$$\overline{\psi}_{m+1} = a_{m+1}, \ \ldots, \overline{\psi}_n = a_n, \ \overline{\psi}_{n+1} = a, \qquad (35')$$

которые также от $q_{\nu+1}, q_{\nu+2}, \ldots, q_{m-1}$ не зависят.

Не может случиться, чтобы из уравнений (35′) можно было найти все производные $p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n$; тогда $x_m, x_{m+1} \ldots, x_n$ были бы произвольными и вследствие условия (4) все производные $p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n$, не зависели бы от параметров (9), будучи равны производным от (34). Положим, что из уравнений (35′) могут быть найдены $p_m, p_{m+1}, \ldots, p_\mu, x_{\mu+1}, x_{\mu+2} \ldots, x_n$, считая, что $\mu + 1 = m$, если уравнения (35′) не зависят от $p_m, \ldots, p_n$.

Уравнения (35′) можно заменить уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \overline{\varphi}_m = p_m - \overline{f}_m = 0, \ldots, \overline{\varphi}_\mu = p_\mu - \overline{f}_\mu = 0, \\ \overline{\varphi}_{\mu+1} = x_{\mu+1} - \overline{\vartheta}_{\mu+1} = 0, \ldots \overline{\varphi}_n = x_n - \overline{\vartheta}_n = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

где

$$\overline{f} = \overline{f}(x_1, \ x_2, \ldots, x_\nu, \ y_{\nu+1}, \ldots, y_{m-1}, \ x_m, \ldots, x_\mu, \ p_{\mu+1}, \ldots, p_n)$$
$$\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}(x_1, \ x_2, \ \ldots, x_\nu, \ y_{\nu+1}, \ldots, y_{m-1}, \ x_m, \ldots, x_\mu).$$

Если мы теперь сверх ранее выполненной подстановки положим:

$$p_{\mu+1} = y_{\mu+1}, \ldots, p_n = y_n, \ x_{\mu+1} = -q_{\mu+1}, \ldots, x_n = -q_n$$
$$\overline{Z} = Z - x_{\mu+1}\, p_{\mu+1} - \ldots - x_n p_n, \ Z = \overline{Z} - y_{\mu+1} q_{\mu+1} - \ldots - y_n q_n,$$

то мы преобразуем уравнения (33′) и (36) в уравнения

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{\varphi}}_1 = p_1 - \overline{\overline{f}}_1 = 0, \ \ldots, \overline{\overline{\varphi}}_\nu = p_\nu - \overline{\overline{f}}_\nu = 0, \\ \overline{\overline{\varphi}}_{\nu+1} = -q_{\nu+1} - \overline{\overline{\vartheta}}_{\nu+1} = 0, \ \ldots, \overline{\overline{\varphi}}_{n-1} = -q_{m-1} - \overline{\overline{\vartheta}}_{m-1} = 0 \\ \overline{Z} = y_{\mu+1} q_{\mu+1} + \ldots + y_n q_n + \overline{\overline{\vartheta}}_0 \ \text{или} \ \overline{\overline{\varphi}}_0 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{\varphi}}_m=p_m-\overline{\overline{f}}_m=0,\ldots,\ \overline{\overline{\varphi}}_\mu=p_\mu-\overline{\overline{f}}_\mu=0,\\ \overline{\varphi}_{\mu+1}=-q_{\mu+1}-\overline{\vartheta}_{\mu+1}=0,\ldots,\ \overline{\overline{\varphi}}_n=-q_n-\overline{\vartheta}_n=0\end{aligned}\right\}\quad(37_1)$$

причем полным интегралом Лагранжа системы (37) будет:

$$\overline{Z}=-y_{\mu+1}\overline{\vartheta}_{\mu+1}-\ldots-y_n\overline{\vartheta}_n+\overline{\overline{\vartheta}}_0. \tag{38}$$

Система (37) будет замкнутой.

Пользуясь найденным полным интегралом Лагранжа, составляем уравнения

$$\left(\frac{\partial\overline{\overline{\vartheta}}}{\partial a}-y_{\mu+1}\frac{\partial\overline{\vartheta}_{\mu+1}}{\partial a}-\ldots-y_n\frac{\partial\overline{\vartheta}_n}{\partial a}\right)b_j+$$
$$+\left(\frac{\partial\overline{\overline{\vartheta}}}{\partial a_j}-y_{\mu+1}\frac{\partial\overline{\vartheta}_{\mu+1}}{\partial a_j}-\ldots-y_n\frac{\partial\overline{\vartheta}_n}{\partial a_j}\right)=0,$$

которые преобразуем, решая относительно $b_{m+1},\ldots,b_n$ и исключая параметры (9), в уравнения

$$\overline{\psi}_{n+m+1}=b_{m+1},\ldots,\ \overline{\psi}_{2n}=b_n.$$

Вглядываясь в уравнение (37), мы видим, что из них могут быть найдены $p_1, p_2,\ldots,p_\nu,\ q_{\nu+1},\ldots,q_{m-1},\ q_n$; следовательно из уравнений (37_1) и из вновь присоединенных к ним могут быть найдены $p_m,\ p_{m+1},\ldots,p_\mu, q_{\mu+1},\ldots,q_{n-1},\ x_m,\ldots,x_\mu, y_{\mu+1},\ldots,y_{n-1}$ и выражены через $x_1, x_2,\ldots,x_\nu,\ y_{\nu+1},\ldots,y_{m-1},\ y_n$.

Возвращаясь к старым переменным, мы получим систему уравнений

$$\psi_{m+1}=a_{m+1},\ldots,\ \psi_n=a_n,\ \psi_{n+1}=a_{n+1},$$
$$\psi_{n+m+1}=b_{m+1},\ldots,\ \psi_{2n}=b_n,$$

в которой функции ψ связаны соотношениями, соответствующими только что выписанным (32) и из которых могут быть найдены $p_m,\ldots,p_\mu,\ x_{\mu+1},\ldots,x_n,\ x_m,\ldots,x_\mu,\ p_{\mu+1},\ldots,p_{n-1}$ и выражены через $x_1,\ldots,x_\nu,\ p_{\nu+1},\ldots,p_{m-1},\ p_n$.

Обратно, так же, как и в § 139, мы можем утверждать: 1) если система (1), преобразуемая в систему (33), замкнута, 2) если уравнения (35) алгебраически независимы, 3) если соблюдены тожества

$$[\psi_i,\ \psi_j]\equiv 0,\quad (i,j=m+1,\ldots,n,\ n+1)$$

и 4) если скобки

$$[F_h,\ \psi_j],\qquad (h=1,\ 2,\ldots,m)$$

обращаются в нуль на основании уравнений (33), то уравнения (1) и (35) определяют полный интеграл системы (1).

Преобразование Лежандра, именно, заменяет систему (33) системой, подходящей под условия § 135 и 136, причем

$$[\psi_i, \psi_j] \text{ и } [F_h, \psi_j]$$

преобразуются в соответственные скобки, связывающие преобразованные функции ψ_i и F_h.

141. Нахождение полного интеграла данной системы. Предварительные замечания. Из сказанного в прошлых параграфах ясно, что полный интеграл $M^{(n)}$ могут допускать только замкнутые системы.

Положим, что система (1) замкнута, и предложим себе найти ее полный интеграл $M^{(n)}$. Пользуясь предположением, что у системы (1) есть полный интеграл $M^{(n)}$, мы пришли к заключению: если из уравнений (1) могут быть найдены аргументы $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, где $\nu < m$, и после их исключения из остальных уравнений получаются уравнения, не зависящие от $p_{\nu+1}, p_{\nu+2}, \ldots, p_n$, то или эти уравнения не зависят от z и из них можно найти $m-\nu$ из аргументов

$$x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n,$$

или из них можно найти z и $m-\nu-1$ из этих аргументов. Последнее заключение есть также следствие замкнутости системы (1). Чтобы убедиться в этом, положим, что из системы (1) можно найти $p_1, \ldots, p_\nu, p_2$, дав части уравнений системы вид:

$$\psi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ldots, \varphi_\nu = p_\nu - f_\nu = 0. \tag{39}$$

Предположение, что сделанное заключение несправедливо, равносильно предположению, что уравнение вида

$$\omega(x_1, \ldots, x_\nu) = 0 \tag{40}$$

есть следствие уравнений системы (1). Решая уравнение (40) относительно одного из его аргументов, скажем x_1, мы заключаем, что и уравнение

$$\varphi = x_1 - \vartheta(x_2, x_3, \ldots, x_\nu) \tag{40'}$$

есть следствие системы (1); но тогда

$$[\varphi_1, \varphi] = 1$$

и скобка $[\varphi_1, \varphi]$ не обращается в нуль на основании уравнений системы.

Оставляя в стороне разобранный случай, когда система (1) разрешима относительно m из аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, сосредоточиваем свое внимание на случае, когда этого нет.

Мы будем считать, что часть уравнений (1) заменена системой (39) и что $\nu < m$, причем ν наибольшее число аргументов $p_1, p_2 \ldots, p_n$, находимых из системы (1), не исключая предположения, что $\nu = 0$.

142. Первый случай обобщенной системы. Положим сначала, что мы имеем дело со случаем § 139.

Система (1) заменима системой

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1=p_1-f_1=0,\ldots,\ \varphi_\nu=p_\nu-f_\nu=0,\\ \varphi_{\nu+1}=x_{\nu+1}-\vartheta_{\nu+1}=0,\ldots,\varphi_m=x_m-\vartheta_m=0\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

где функции f не зависят от $x_{\nu+1},\ldots,x_m$, а функции ϑ, кроме того, не зависят от $p_{\nu+1},\ldots,p_n$ и z.

Выполнив подстановку Лежандра

$$p_{\nu+1}=y_{\nu+1},\ldots,\ p_m=y_m,\ x_{\nu+1}=-q_{\nu+1},\ldots,\ x_m=-q_m$$

$$Z=z-x_{\nu+1}p_{\nu+1}-\ldots-x_mp_m,\ z=Z-y_{\nu+1}q_{\nu+1}-\ldots-y_mq_m$$

мы заменим систему (30) системой

$$p_1-\overline{f}_1=0,\ldots,\ p_\nu-\overline{f}_\nu=0,\ q_{\nu+1}+\vartheta_{\nu+1}=0,\ldots,q_m+\vartheta_m=0\quad(30')$$

и сможем найти ее полный интеграл Лагранжа обычным образом. Возвращение к старым переменным даст полный интеграл $M^{(n)}$. Интегрирование системы (30′) в рассматриваемом случае довольно просто. Положим, что $\nu\neq0$. Если

$$\overline{f}=$$
$$=\overline{f}(x_1,x_2\ldots,x_\nu,x_{m+1},\ldots,x_n,y_{\nu+1},\ldots,y_m,p_{m+1},\ldots,p_n,Z-y_{\nu+1}q_{\nu+1}-\ldots-y_mp_m)$$

$$\vartheta=\vartheta\,(x_1,\,x_2,\ldots,x_\nu,\ x_{m+1},\ldots,x_n),$$

то применение методы § 106 непосредственно дает: если

$$Z_1=V(x_1,\,x_2,\ldots,x_\nu,\ x_{m+1},\ldots,x_n,\ a_{m+1},\ldots,a_n,\ a)$$

полный интеграл системы

$$p_i-\overline{f}_i\,(x_1,\,x_2,\ldots,x_\nu,\ x_{m+1},\ldots,x_n,\ 0,\ldots,0,\ p_{m+1},\ldots,p_n,\ Z_1)=0,$$
$$(i=1,\ 2,\ldots,\nu),$$

то полный интеграл системы (30′)

$$Z=-\vartheta_{\nu+1}y_{\nu+1}-\ldots-\vartheta_my_m+$$
$$+V(x_1,\,x_2,\ldots,x_\nu,\ x_{m+1},\ldots,x_n,\ a_{m+1},\ldots,a_n,\ a).$$

Возвращаясь к старым переменным, легко получаем для системы $M^{(n)}$ систему уравнений

$$z=V\,(x_1,x_2,\ldots,x_\nu,\ x_{m+1},\ldots,x_n,\ a_{m+1},\ldots,a_n,\ a)$$

$$p_i=-\sum_{k=m+1}^{k=n}\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x_i}\,p_k+\frac{\partial V}{\partial x_i},\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\nu,\ m+1,\ \ldots,n)$$

$$x_j=\vartheta_j.\qquad(j=\nu+1,\ldots,m)$$

Если $\nu=0$, то полный интеграл Лагранжа системы (30′) дается равенством

$$Z=-\vartheta_1y_1-\ldots-\vartheta_my_m+a_{m+1}x_{m+1}+\ldots+a_nx_n+a.$$

Полный интеграл $M^{(n)}$ преобразованной системы получается присоединением к нему равенств

$$q_1 = -\vartheta_1, \ldots, q_m = -\vartheta_m, \; p_j = -\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j} y_k + a_j, (j = m+1, \ldots, n).$$

Возвращение к старым переменным приводит к равенствам:

$$z = a_{m+1} x_{m+1} + \ldots + a_n x_n + a$$

$$x_1 = \vartheta_1, \ldots, \quad x_m = \vartheta_m, \quad p_j = -\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_j} p_k + a_j, \; (j = m+1, \ldots, n).$$

143. Второй случай обобщенной системы. Переходим к случаю § 140. В этом случае система (1) заменима системой

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 = p_1 - f_1 = 0, \ldots, \varphi_\nu = p_\nu - f_\nu = 0, \\ \varphi_{\nu+1} = x_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+1}, \ldots, \varphi_{m-1} = x_{m-1} - \vartheta_{m-1}, \varphi_0 = z - \vartheta = 0 \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

где

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \; x_m, \; x_{m+1}, \ldots, x_n, \; p_{\nu+1}, \ldots, p_{m-1}, \; p_m, \ldots, p_n)$$

$$\vartheta = \vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \; x_m, \; x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Выполнив подстановку Лежандра

$$\begin{aligned} p_{\nu+1} &= y_{\nu+1}, \ldots, p_{m-1} = y_{m-1}, \\ x_{\nu+1} &= -q_{\nu+1}, \ldots, x_{m-1} = -q_{m-1} \\ z &= Z - y_{\nu+1} q_{\nu+1} - \ldots - y_{m-1} q_{m-1}, \\ Z &= z - x_{\nu+1} p_{\nu+1} - \ldots - x_{m-1} p_{m-1}, \end{aligned}$$

мы преобразуем систему (33) в систему

$$\left.\begin{aligned} p_1 - \bar{f}_1 = 0, \ldots, p_\nu - \bar{f}_\nu = 0, \\ q_{\nu+1} + \vartheta_{\nu+1} = 0, \ldots, q_{m-1} + \vartheta_{m-1} = 0 \\ Z = \vartheta - y_{\nu+1} \vartheta_{\nu+1} - \ldots - y_{m-1} \vartheta_{m-1} = \theta \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Полагаем сначала, что $\nu \neq 0$. Выполняем подстановку

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu, \; m, \; m+1, \ldots, n) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= -\sum_{k=\nu+1}^{k=m-1} y_k \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \\ q_j &= \frac{\partial \theta}{\partial y_j} + s_j = -\vartheta_j + s_j, \qquad (j = \nu+1, \ldots, m-1) \\ Z &= \theta + u. \end{aligned}\right\} (42)$$

Мы заменим систему (41) системой

$$\left.\begin{aligned} &s_i = F_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_\nu,\ x_m, \ldots, x_n, y_{\nu+1}, \ldots, y_{m-1},\ s_m, \ldots, s_n),\\ &(i = 1, \ldots, \nu)\ s_{\nu+1} = 0, \ldots,\ s_{m-1} = 0, \quad u = 0 \end{aligned}\right\}(43)$$

Система остается замкнутой, так как при выполненном преобразовании всякая скобка $[\varphi_i, \varphi_j]$ преобразуется в скобку $[\overline{\varphi_i}, \overline{\varphi_j}]$, где $\overline{\varphi}$ результат преобразования над функцией φ.

Чтобы убедиться в этом, положим, упрощая обозначения,

$$\varphi_i = \varphi_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, z)$$

$$p_i = \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + s_i, \quad z = \theta + u.$$

Мы будем иметь

$$\overline{\varphi_i} = \varphi_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ s_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_1},\ s_2 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}, \ldots, s_n + \frac{\partial\theta}{\partial x_n},\ \theta + u)$$

и

$$\frac{\partial\overline{\varphi_i}}{\partial s_k} = \overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}}, \quad \frac{\partial\overline{\varphi_i}}{\partial u} = \overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}}, \quad \frac{\partial\overline{\varphi_i}}{\partial x_k} = \overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}} + \sum_{l=1}^{l=n}\left(\overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_l}}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x_l\,\partial x_k} + \overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}}\,\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right).$$

Значит

$$\frac{\partial\overline{\varphi_i}}{\partial s_k}\left(\frac{\partial\overline{\varphi_j}}{\partial x_k} + s_k\,\frac{\partial\overline{\varphi_j}}{\partial u}\right) = \overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}}\left(\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}} + \sum_{l=1}^{l=n}\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_l}}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x_k\,\partial x_l} + \overline{p_k}\,\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}}\right),$$

так как

$$\overline{p_k}\,\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k} + s_k\right)\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}} = \frac{\partial\theta}{\partial x_k}\,\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}} + s_k\,\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}}.$$

При составлении скобки $[\overline{\varphi_i}, \overline{\varphi_j}]$ суммы

$$\sum_{k=1}^{k=n}\overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}}\sum_{l=1}^{l=n}\overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_l}}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x_l\,\partial x_k}, \qquad \sum_{k=1}^{k=n}\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_k}}\sum_{l=1}^{l=n}\overline{\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_l}}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x_l\,\partial x_k}$$

сокращаются.

В системе (43):

$$F_i = f\,(x_1, x_2 \ldots, x\ , x_m, \ldots, x_n, y_{\nu+1}, \ldots, y_{m-1}, \frac{\partial\theta}{\partial x_m} + s_m, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_n} + s_n) - \frac{\partial\theta}{\partial x_i}.$$

Из замкнутости системы (43) прежде всего заключаем, что функции $F_1, \ldots F_\nu$ от $y_{\nu+1}, \ldots, y_{m-1}$ не зависят. Действительно, скобка

$$[s_j,\ s_i - F_i] = -\frac{\partial F}{\partial y_j}, \qquad (j = \nu+1, \ldots, m-1 \quad i = 1,\ 2 \ldots, \nu)$$

не завися от $s_1, s_2, \ldots, s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots, s_{m-1}$, только тогда нуль на основании уравнений системы, когда

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} \equiv 0.$$

Составляя затем скобки $[s_i - F_i, u]$, получаем, что

$$F_i \equiv \sum_{k=m}^{k=n} \frac{\partial F_i}{\partial s_k} s_k,$$

откуда ясно, что функции $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$ однородные функции первого измерения от $s_m, s_{m+1} \ldots, s_n$.

Пользуясь этим, положим:

$$\pi_1 = -\frac{s_1}{s_m}, \ldots, \pi_\nu = -\frac{s_\nu}{s_m}, \quad \pi_{m+1} = -\frac{s_{m+1}}{s_m}, \ldots, \pi_n = -\frac{s_n}{s_m} \tag{44}$$

и введем в рассмотрение систему

$$\left.\begin{aligned} \pi_i = -F_i(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, 1, -\pi_{m+1}, \ldots, -\pi_n), \\ (i = 1, 2, \ldots, \nu), \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

записывая явно, что функции F_i от $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \ldots, y_{m-1}$ не зависят.

Система (45) замкнутая, если в ней считать x_m неизвестной функцией, а $\pi_1, \ldots \pi_\nu, \pi_{m+1}, \ldots, \pi_n$ производными от x_m. Действительно, обозначая через F, φ однородные функции от $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и через $\{F\}$ и $\{\varphi\}$ результаты подстановки (44), имеем:

$$\{(F, \varphi)\} = \sum{}' \left\{\frac{\partial F}{\partial s_k}\right\}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right\} - \left\{\frac{\partial F}{\partial x_k}\right\}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial s_k}\right\} +$$
$$+ \left\{\frac{\partial F}{\partial s_m}\right\}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\right\} - \left\{\frac{\partial F}{\partial x_m}\right\}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial s_m}\right\} = [\{F\}, \{\Phi\}] +$$
$$+ \{F\}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\right\} : s_m - \{\Phi\}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_m}\right\} : s_m,$$

так как

$$\frac{\partial F}{\partial s_m} s_m = -\sum{}' \frac{\partial F}{\partial s_i} s_i + F, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_m} s_m = -\sum{}' \frac{\partial \varphi}{\partial s_i} s_i + \psi.$$

Положим, считая $\nu > 0$, что

$$x_m = V(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_{m+1}, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a)$$

полный интеграл системы (45).

Если

$$\pi_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \pi_\nu = \frac{\partial V}{\partial x_\nu}, \pi_{m+1} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \pi_n = \frac{\partial V}{\partial x_n},$$

мы имеем

$$dx_m = \pi_1 dx_1 + \ldots + \pi_\nu dx_\nu + \pi_{m+1} dx_{m+1} + \ldots + \pi_n dx_n.$$

Следовательно, положив

$$\left.\begin{aligned} x_m &= V(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_{m+1}, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a) \\ s_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} s_m, \ldots, s_\nu = -\frac{\partial V}{\partial x_\nu} s_m, \\ s_{m+1} &= -\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}} s_m, \ldots, s_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n} s_m \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

мы будем иметь

$$s_1 dx_1 + \ldots + s_\nu dx_\nu + s_m dx_m + s_{m+1} dx_{m+1} + \ldots + s_n dx_n = 0,$$

а также удовлетворим уравнениям (43) первой строки.

Присоединив, поэтому, к уравнениям (46) уравнения

$$s_{\nu+1} = 0, \ldots, s_{m-1} = 0, \; u = 0, \qquad (46')$$

мы получим полный интеграл $M^{(n)}$ системы (43).

Возвращаясь к старым аргументам, мы получим полный интеграл $M^{(n)}$ системы (1) в виде

$$p_i = -\sum_{k=\nu+1}^{k=m-1} p_k \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{k=\nu+1}^{k=m-1} p_k \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_m} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} + p_m\right),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \nu, m+1, \ldots, n),$$

$$x_m = V(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_{m+1}, \ldots, x_n, a_{m+1}, \ldots, a_n, a)$$

$$x_j = \vartheta_j, z = \vartheta, \qquad (j = \nu+1, \ldots, m-1).$$

При $\nu = 0$ полному интегралу можно дать вид

$$p_i = -\sum_{k=1}^{k=m-1} p_k \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} - a_i\left(\sum_{k=\nu+1}^{k=m-1} p_k \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_m} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} + p_m\right),$$

$$(i = m+1, \ldots, n)$$

$$x_m = a_{m+1} x_{m+1} + \ldots + a_n x_n + a$$

$$x_j = \vartheta_j, z = \vartheta, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Примеры: 1) Применяя сказанное к уравнению:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

получаем полный интеграл в виде

$$x_1 = x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n + a$$

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$p_i = a_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - p_1\right) + \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Применив к уравнению преобразование Лежандра

$$p_1 = y_1, \ldots, p_n = y_n, \quad Z = z - x_1 p_1 - \ldots - x_n p_n,$$

мы преобразовали бы его в уравнение

$$Z = q_1 y_1 + \ldots + q_n y_n + f(-q_1, -q_2, \ldots, -q_n),$$

полный интеграл которого

$$Z = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + f(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n).$$

Этому полному интегралу отвечает интеграл $M^{(n)}$, получаемый из него присоединением уравнений

$$q_1 = a_1, \ldots, q_n = a_n.$$

Возвращение к старым переменным привело бы к интегралу $M^{(n)}$ в виде

$$z = f(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n), \quad x_1 = -a_1, \; x_2 = -a_2, \ldots, x_n = -a_n.$$

2) Применяя сказанное к системе

$$p_1 = 1, \quad p_2 = p_3, \quad z = x_1,$$

получаем

$$p_1 = 1, \quad p_2 = p_3, \quad x_3 + x_2 = a, \quad z = x_1.$$

144. Метода Коркина. Приложение всему сказанному мы найдем, разбирая методу А. Н. Коркина. Положим, что дана система из m уравнений в инволюции

$$\left.\begin{array}{r} F_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0 \\ F_{s+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, z) = 0 \end{array}\right\} \tag{47}$$

разрешимых относительно m из производных $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причем из первых s уравнений могут быть найдены $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Положим, что известен полный интеграл $M^{(n)}$ системы из первых s уравнений (47):

$$\psi_{s+1} = a_{s+1}, \ldots, \psi_n = a_n, \; \psi_{n+1} = a, \tag{48}$$

где функции ψ_i зависят от аргументов $p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

К уравнениям (48) по сказанному в § 135 мы можем присоединить уравнения

$$\psi_{n+s+1} = b_{s+1}, \ldots, \psi_{2n} = b_n, \tag{49}$$

которые вместе с уравнениями (48) и (47) образуют систему уравнений, алгебраически независимых относительно аргументов

$$p_1, p_2, \ldots, p_s, p_{s+1}, \ldots, p_n, x_{s+1}, \ldots, x_n, z. \tag{50}$$

Решая эти уравнения, мы получим аргументы (50) в виде функций от $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и параметров

$$a,\ a_{s+1}, \ldots, a_n,\ b_{s+1}, \ldots, b_n. \tag{51}$$

Трактуемые как функции от $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и аргументов (50), аргументы (51) связаны зависимостями

$$\left.\begin{array}{l} [a_h, a_{h_1}] \equiv 0, [b_g, b_{g_1}] \equiv 0, [a_h, b_g] \equiv 0, [a_h, a_g] \equiv 0\,(h \neq g), \\ {[a, a_h]} \equiv 0, [a_h, b_h] \equiv -\dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial \overline{V}}{\partial a}\right)}, [a, b_k] \equiv -\dfrac{b_k}{\left(\dfrac{\partial \overline{V}}{\partial a}\right)}, \end{array}\right\} \tag{52}$$

где $\left(\dfrac{\partial \overline{V}}{\partial a}\right)$ — некоторая функция от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и (50).

Кроме того, соблюдены зависимости

$$([F_i, a_h]) \equiv 0, \quad ([F_i, b_g)] \equiv 0, \qquad (i \equiv 1, 2, \ldots, s) \tag{53}$$

где знак (f) обозначает результат исключения из функций f аргу- гументов $p_1, p_2, \ldots, p_s$ при помощи первых s уравнений (47).

Например, если известен полный интеграл Лагранжа системы из первых s уравнений (47):

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n, a, a_{s+1}, \ldots, a_n), \tag{48'}$$

то уравнения (48) и (49) получаются решением относительно аргументов (51) уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial x_{s+1}} = p_{s+1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} = p_n$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} b_{s+1} + \frac{\partial V}{\partial a_{s+1}} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a} b_n + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0.$$

Подставляя найденные значения аргументов (50) в последние $m-s$ уравнений (47), мы обратим их собрание в

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{s+1}(x_1, x_2, \ldots, x_s, a, a_{s+1}, \ldots, a_n, b_{s+1}, \ldots, b_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_m(x_1, x_2, \ldots, x_s, a, a_{s+1}, \ldots, a_n, b_{s+1}, \ldots, b_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{54}$$

Докажем прежде всего, что уравнения (54) не зависят от $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Последнее легко вытекает из равенств (53). Обозначая чертой наверху результат исключения аргументов (51) при помощи равенств (48) и (49) из тожества

$$F_j \equiv \overline{\Phi}_j,\ j = s+1, \ldots, m,$$

имеем

$$[F_i, F_j] \equiv 0 = [\overline{F_i, \Phi_j}] + \sum \overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial a_k}} [F_i, a_k] + \sum \overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial b_l}} [F_i, b_l].$$

Отсюда, вследствие (53), заключаем:

$$([\overline{F_i, \Phi_j}]) = \sum_{k=1}^{k=s} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\overline{\partial \Phi_j}}{\partial x_k}\right) \equiv 0, \ (i=1, 2, \ldots, s, \ j=s+1, \ldots, m).$$

Давая i значения $1, 2, \ldots, s$ и вспоминая, что из первых s уравнений (47) можно найти $p_1, p_2, \ldots, p_s$, заключаем, что при всех j и $k=1, 2, \ldots, s$ имеем

$$\left(\frac{\overline{\partial \Phi_j}}{\partial x_k}\right) = \Phi'_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_s, (a), (a_{s+1}), \ldots, (a_n), (b_{s+1}), \ldots, (b_n)) \equiv 0.$$

Функции (51) алгебраически независимы относительно аргументов

$$x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n, z, p_{s+1}, \ldots, p_n, \qquad (50')$$

так как образуют собрание решений системы

$$([F_i, \Phi]) = 0. \qquad (i=1, 2, \ldots, s)$$

Вследствие этого из последних тожеств заключаем, что высказанное утверждение справедливо.

Итак, уравнения (54) имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} f_{s+1}(a, a_{s+1}, \ldots, a_n, b_{s+1}, \ldots, b_n) = 0 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ f_m(a, a_{s+1}, \ldots, a_n, b_{s+1}, \ldots, b_n) = 0. \end{array}\right\} \qquad (55)$$

Докажем теперь, что если мы будем считать $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a$ независимыми переменными, а $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$ производными по ним от a, то система уравнений (55) будет в инволюции.

Мы опять имеем

$$F_j \equiv \overline{f_j}. \qquad (j=s+1, \ldots, m)$$

Пользуясь (52), находим

$$\left.\begin{array}{l} [F_j, a_k] = [\overline{f_j, a_k}] + \displaystyle\sum_{l=s+1}^{l=n} \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a_l}[a_l, a_k] + \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a}[a, a_k] + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{l=s+1}^{l=n} \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial b_l}[b_l, a_k] = \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial b_k}\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)} \\ [F_j, a] = [\overline{f_j, a}] + \displaystyle\sum_{l=s+1}^{l=n} \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a_l}[a_l, a] + \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a}[a, a] + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{l=s+1}^{l=n} \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial b_l}[b_l, a] = \sum_{l=s+1}^{l=n} \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial b_l} b_l \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)} \end{array}\right\} \qquad (56)$$

$$\left.\begin{aligned}[F_j, b_k] = [\overline{f_j, b_k}] + \sum_{l=s+1}^{l=n} \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a_l}[a_l, b_k] + \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a}[a, b_k] + \\ + \sum_{l=s+1}^{s=n} \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial b_l}[b_l, b_k] = -\left(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a_k} + \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a} b_k\right)\frac{1}{\left(\frac{\overline{\partial V}}{\partial a}\right)}\end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Далее, если h также одно из чисел $s+1, \ldots, m$, имеем

$$[F_j, F_h] \equiv 0 = [\overline{F_j, f_h}] + \sum_{k=s+1}^{k=n} \frac{\overline{\partial f_h}}{\partial a_k}[F_j\, a_k] + \frac{\overline{\partial f_h}}{\partial a}[F_j, a] +$$

$$+ \sum_{k=s+1}^{k=n} \frac{\partial f_h}{\partial b_k}[F_j, b_k] = \frac{1}{\left(\frac{\overline{\partial V}}{\partial a}\right)}\left\{\sum_{k=s+1}^{k=n} \frac{\overline{\partial f_h}}{\partial a_k}\,\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial b_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{\partial f_h}}{\partial a} \sum_{l=s+1}^{l=n} \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial b_l} b_k - \sum_{k=s+1}^{k=n} \frac{\overline{\partial f_h}}{\partial b_k}\left(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a_k} + \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial a} b_k\right)\right\},$$

откуда, понимая теперь скобку соответственно предположениям об a и b, заключаем

$$[\overline{f_j, f_h}] \equiv 0;$$

вследствие указанной уже алгебраической независимости функций (51) как функций от аргументов (50′), из последних равенств выводим

$$[f_j, f_h] \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Если система (55) разрешима относительно $m-s$ из аргументов $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$, то можно искать ее полный интеграл Лагранжа. Но последнее обстоятельство может и не иметь места: уравнения (55) могут не быть алгебраически независимыми относительно аргументов $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$; в этом последнем случае может быть речь только о полном интеграле $M^{(n-s)}$ системы (55), который и может быть найден по правилам § 142 или 143.

Положим, поэтому, что нам известен полный интеграл $M^{(n-s)}$ системы (55), получаемый присоединением к уравнениям (55) некоторых уравнений

$$A_{m+1} = c_{m+1}, \ldots, A_n = c_n,\ A_{n+1} = c, \qquad (57)$$

в которых функции (57) алгебраически независимы относительно аргументов (51). Функции (57) находятся в инволюции

$$[A_i, A_j] \equiv 0, \qquad (i, j = m+1, \ldots, n, n+1) \quad (58)$$

и скобки

$$[f_h, A_i], \qquad (h = s+1, \ldots, m) \quad (59)$$

обращаются в нуль на основании уравнений (55).

Если мы в функциях A_i заменим аргументы (51) их значениями (48) и (49), то мы обратим уравнения (57) в уравнения

$$\Omega_{m+1} = c_{m+1}, \ldots, \Omega_n = c_n, \Omega_{n+1} = c, \qquad (60)$$

в которых Ω_i функции от $x_1, \ldots, x_s$ и аргументов (50).

Докажем, что уравнения (47) вместе с уравнениями (60) образуют полный интеграл $M^{(n)}$ системы (47).

Прежде всего можно установить, что уравнения (60) алгебраически независимы относительно их аргументов. Последнее очевидно: если бы эти аргументы можно было исключить, то обнаружилась бы зависимость между $c_{m+1}, \ldots, c_n, c$; но такой зависимости нет, так как уравнения (57) алгебраически независимы относительно их аргументов.

Для доказательства нашего утверждения нам остается доказать, соответственно со сказанным в § 136, что справедливы тожества

$$[\Omega_i, \Omega_j] \equiv 0, \quad (i, j = m+1, \ldots, n) \quad (61)$$

и что скобки

$$[F_h, \Omega_i], \qquad (h = 1, 2, \ldots, m) \quad (62)$$

обращаются в нуль на основании уравнений (47).

Последнее утверждение легко вытекает из равенств (53), (55), (58) и сказанного о скобках (59).

Мы имеем, именно, тожества

$$\Omega_i = \overline{A_i}.$$

В силу этих тожеств, заменяя временно a на a_{n+1},

$$[\Omega_i, \Omega_j] = \sum_{k=s+1}^{k=n+1} \overline{\frac{\partial A_j}{\partial a_k}} [\Omega_i, a_k] + \sum_{k=s+1}^{k=n} \overline{\frac{\partial A_j}{\partial b_k}} [\Omega_i, b_k]. \qquad (63)$$

Но, в свою очередь,

$$[\Omega_i, a_k] = \sum_{l=k+1}^{l=n+1} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial a_l}} [a_l, a_k] + \sum_{l=s+1}^{l=n} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial b_l}} [b_l, a_k]$$

$$[\Omega_i, b_k] = \sum_{l=k+1}^{l=n+1} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial a_l}} [a_l, b_k] + \sum_{l=s+1}^{l=n} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial b_l}} [b_l, b_k].$$

Следовательно, тожество (63) имеет вид

$$\left.\begin{array}{l}[\Omega_i, \Omega_j] = \left\{ \sum_{k=s+1}^{k=n} \overline{\frac{\partial A_j}{\partial a_k}}\, \overline{\frac{\partial A_i}{\partial b_k}} + \overline{\frac{\partial A_j}{\partial a}} \sum_{l=s+1}^{l=n} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial b_l}}\, b_l - \right. \\ \left. - \sum_{k=s+1}^{k=n} \overline{\frac{\partial A_j}{\partial b_k}}\, \overline{\frac{\partial A_i}{\partial a_k}} - \overline{\frac{\partial A_i}{\partial a}} \sum_{k=s+1}^{k=n} \overline{\frac{\partial A_j}{\partial b_k}} b_k \right\} \frac{1}{\left(\overline{\frac{\partial V}{\partial a}}\right)} = [\overline{A_i, A_j}] \frac{1}{\left(\overline{\frac{\partial V}{\partial a}}\right)}\end{array}\right\} \tag{63'}$$

и значит, тожества (61) соблюдены на основании тожеств (58). Далее

$$[F_h, \Omega_i] = \sum_{k=s+1}^{k=n+1} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial a_k}} [F_h, a_k] + \sum_{k=s+1}^{k=n} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial b_k}} [F_h, b_k].$$

Если $h = 1, 2, \ldots, s$ равенство

$$([F_h, \Omega_i]) \equiv 0$$

следует из равенства (53).

В случае, когда $h = s+1, \ldots, m$ равенства (56) дают

$$[F_h, \Omega_i] = \left\{ \sum_{k=s+1}^{k=n} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial a_k}}\, \overline{\frac{\partial f_h}{\partial b_k}} + \overline{\frac{\partial A_i}{\partial a}} \sum_{l=s+1}^{l=n} \overline{\frac{\partial f_h}{\partial b_l}}\, b_l - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=s+1}^{k=n} \overline{\frac{\partial A_i}{\partial b_k}} \left(\overline{\frac{\partial f_h}{\partial a_k}} + \overline{\frac{\partial f_h}{\partial a}}\, b_k \right) \right\} \frac{1}{\left(\overline{\frac{\partial V}{\partial a}}\right)} = [\overline{f_h, A_i}] \frac{1}{\left(\overline{\frac{\partial V}{\partial a}}\right)}.$$

Так как скобка $[f_h, A_i]$ обращается в нуль после подстановки в нее на место некоторых из аргументов (51) их значений, найденных из уравнений (55), функция $[\overline{f_h, A_i}]$ от ψ_j, ψ_{n+j} обращается в нуль после замены в ней соответственных аргументов найденных из уравнений

$$F_i = f_i(\psi_{n+1}, \psi_{s+1}, \ldots, \psi_n, \psi_{n+s+1}, \ldots, \psi_{2n}) = 0,$$

т. е. обращается в нуль на основании последних уравнений (47). Следовательно присоединение к (47) уравнений (60) дает действительно полный интеграл $M^{(n)}$ системы (47), по которому может быть найден ее полный интеграл Лагранжа по правилам § 137.

Соответственно сказанному в пункте втором § 135 мы получим полный интеграл Лагранжа непосредственно из уравнений (47) и (60) тогда и только тогда, когда из уравнений (47) и (60) могут быть найдены все производные $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Пример. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}
z=\frac{1}{2}(p_1x_1+p_2x_2)+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{(p_3x_3+1)}\right)^2+p_4x_4 \\
\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}\;\; x_1+x_4=0 \\
\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}\;\; x_2-\left(1+\sqrt{1+p_3x_3}\right)x_3=0 \\
p_4+\frac{p_1x_1}{x_4}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Система (64) замкнута; если мы дадим ей вид

$$\left.\begin{aligned}
-z+\frac{1}{2}(p_1x_1+p_2x_2)+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{p_3x_3+1}\right)^2+p_4x_4=0 \\
\frac{\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}\;x_1}{x_4}+1=0 \\
\frac{\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}}{x_4}\,x_2-\frac{1+\sqrt{1+p_3x_3}}{x_4}\,x_3=0 \\
p_4-\frac{p_1}{\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}}+\frac{p_1}{\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}}\left(\frac{\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}}{x_4}x_1+1\right)+ \\
+\frac{p_2}{\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}}\left(\frac{\sqrt{p_1x_1+p_2x_2}}{x_4}\,x_2-\frac{(1+\sqrt{1+p_3x_3})\,x_2}{x_4}=0\right.
\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

то мы получим систему в инволюции.

Полный интеграл первого уравнения

$$z=\frac{1}{2}(a_1x_1+a_2x_2)^2+\frac{1}{2}(a_3x_3+2)^2+ax_4.$$

Решая уравнения

$$\left.\begin{aligned}
p_1=(a_1x_1+a_2x_2)\,a_1,\; p_2=(a_1x_1+a_2x_2)\,a_2,\; p_3=(a_3x_3+2)\,a_3,\; p_4=a \\
x_4b_1+(a_1x_1+a_2x_2)\,x_1=0,\;\; x_4b_2+(a_1x_1+a_2x_2)\,x_2=0, \\
x_4b_3+(a_3x_3+2)\,x_3=0,
\end{aligned}\right\} (65')$$

можем найти

$$x_1=b_1\sqrt{-\frac{x_4}{a_1b_1+a_2b_2}},\quad x_2=b_2\sqrt{-\frac{x_4}{a_1b_1+a_2b_2}},$$

$$x_3=\frac{-1+\sqrt{1-a_3b_3x_4}}{a_3}$$

$$p_1=a_1\sqrt{-x_4(a_1b_1+a_2b_2)},\quad p_2=a_2\sqrt{-x_4(a_1b_1+a_2b_2)},$$

$$p_3=a_3(1+\sqrt{1-a_3b_3x_4}),\quad p_4=a.$$

Подставляя p_1, p_2, p_3, p_4 в последние три уравнения системы (65), получаем, использовав уравнения (65'):

$$\left.\begin{array}{r} b_1 - 1 = 0 \\ b_2 - b_3 = 0 \\ a - a_1 - a_1(b_1 - 1) - a_2(b_2 - b_3) = 0. \end{array}\right\} \tag{66}$$

Полный интеграл $M^{(3)}$ последней системы

$$b_1 = 1, \quad b_2 = b_3, \quad a_3 = c - a_2, \quad a = a_1, \tag{67}$$

найден в § 143 методами того же параграфа.

Удовлетворяя условиям

$$x_4\, da + (a_1 x_1 + a_2 x_2)(x_1\, da_1 + x_2\, da_2) + (a_3 x_3 + 2)\, x_3\, da_3 = 0$$

значениями a, a_1, a_2, a_3, удовлетворяющими уравнениям

$$a_2 + a_3 = c, \quad a = a_1$$

находим:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = -\frac{x_4}{x_1}, \quad a_3 x_3 + 2 = -\frac{x_4 x_2}{x_1 x_3}$$

$$a = -\frac{x_4}{x_1^2} - \frac{x_4 x_2^2}{x_3^2 x_1^2} - c\frac{x_2}{x_1} - 2\frac{x_2}{x_1 x_3}.$$

Полный интеграл системы (64):

$$z = -\frac{1}{2}\frac{x_4^2}{x_1^2} - \frac{1}{2}\frac{x_4^2 x_2^2}{x_3^2 x_1^2} - c\frac{x_2 x_4}{x_1} - 2\frac{x_2 x_4}{x_1 x_3}.$$

145. Замечания о методе Коркина в ее первоначальной редакции. В ее первоначальной редакции метода Коркина требовала нахождения полного интеграла Лагранжа системы из первых s уравнений (47), что, конечно, всегда выполнимо.

Далее, требовалось нахождение полного интеграла Лагранжа системы (55), которая, в свою очередь, могла быть трактуема как система (47) и полный интеграл ее мог быть отыскиваемым применением той же методы Коркина. Последнее действие не всегда выполнимо; мы видели на примере прошлого параграфа, что уравнения (55) могут оказаться неразрешимыми относительно аргументов $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$, вследствие чего не может быть и речи о нахождении ее полного интеграла Лагранжа.

Положим теперь, что система (55) разрешима относительно $m-s$ из аргументов $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$.

Найдем полный интеграл системы (55):

$$a = \omega(a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_n, c_{m+1}, \ldots, c_n, c). \tag{68}$$

Следуя первоначальной редакции методы, нужно к уравнению (68) присоединить уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial a_{s+1}} + \frac{\partial \omega}{\partial a_{s+1}}\,\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n} + \frac{\partial \omega}{\partial a_n}\,\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \tag{69}$$

использовав полный интеграл

$$z = V(x_1, x_2 \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n, a, a_{s+1}, \ldots, a_n), \qquad (48')$$

и из уравнений (68), (69) искать $a, a_{s+1}, \ldots, a_n$ с тем, чтобы подставить найденные значения в (48').

Возможность такого решения уравнений (68), (69) относительно аргументов $a, a_{s+1}, \ldots, a_n$ должна быть, однако, установлена. Допустив, что аргументы $a, a_{s+1}, \ldots, a_n$ могут быть найдены и, заменив их в (48') найденными их значениями, мы получаем полный интеграл системы (47). Действительно, из уравнений (68), (69) ясно, что найденные значения $a, a_{s+1}, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial a_{s+1}} da_{s+1} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0. \qquad (\text{N}8)$$

Следовательно z и после подстановки на место $a, a_{s+1}, \ldots, a_n$ их значений остается решением системы из первых s уравнений (47). Но то решение системы из первых s уравнений, которое мы таким образом найдем, вследствие соблюдения уравнений (55) и уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial a} b_{s+1} + \frac{\partial V}{\partial a_{s+1}} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a} b_n + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \qquad (70)$$

использованных при составлении уравнений (55) и в которых теперь

$$b_{s+1} = \frac{\partial \omega}{\partial a_{s+1}}, \ldots, \quad b_n = \frac{\partial \omega}{\partial a_n},$$

удовлетворяет остальным уравнениям системы.

Остается проверить, что z, зависящее теперь от $n - m + 1$ параметров

$$c, c_{m+1}, \ldots, c_n, \qquad (71)$$

действительно полный интеграл системы (47), т. е. что из уравнений

$$z = \overline{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_{m+1}, \ldots, c_n, c)$$

$$p_{m+1} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_{s+1}}, \ldots, p_n = \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_n}$$

могут быть найдены параметры (71). Последнее ясно из того, что эти параметры могут быть найдены из уравнений (68) и (69), если придать последним вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial a_{s+1}} = -\frac{\partial V}{\partial a_{s+1}} : \frac{\partial V}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial \omega}{\partial a_n} = -\frac{\partial V}{\partial a_n} : \frac{\partial V}{\partial a},$$

так как (68) полный интеграл системы (65). Заменяя в полученных для (71) выражениях a_{s+1}, a_{s+2}, ..., a_n, а их значениями, получим, что они могут быть найдены.

В заключение заметим, что в случае, когда некоторые из уравнений (55) не зависят от аргументов b_{s+1}, b_{s+2}, ..., b_n, можно продолжить выкладки, применяя методу в ее первоначальном виде.

Положим, что первые σ уравнений (55) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} f_{s+1}(a, a_{s+1}, \ldots, a_n) &= 0 \\ f_{s+\sigma}(a, a_{s+1}, \ldots, a_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Найдя в этом случае из уравнений (72) σ из аргументов $a, a_{s+1}, \ldots, a_n$ и подставив их в полный интеграл (48′), мы получим полный интеграл системы из первых $s+\sigma$ уравнений.

Действительно, обозначим знаками

$$a', a'_{s+\sigma+1}, \ldots, a'_n \tag{73}$$

те аргументы $a, a_{s+1}, \ldots, a_n$, через которые выражаются остальные.

Условие (Ɲ) остается соблюденным, так как при постоянстве $a_1', a'_{s+\sigma+1}, \ldots, a'_n$ все аргументы a_1, $a_{s+1}, \ldots, a_n$ постоянны. Следовательно функция

$$z = \overline{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n, a', a'_{s+\sigma+1}, \ldots, a'_n) \tag{74}$$

остается решением системы из первых s уравнений (47).

Уравнения системы (55) нами получены исключением аргументов

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, x_{s+1}, \ldots, x_n, z \tag{50}$$

из последних уравнений (47). Вместо того, чтобы вести это исключение так, как оно было выполнено в § 144, т. е. одновременно, можно было в рассматриваемом случае, когда имеется интеграл (48′), вести его последовательно: исключить сначала $p_1, p_2, \ldots, p_n$, пользуясь формулами

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n} \tag{75}$$

и затем из полученных функций от $x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n$ исключать $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ при помощи уравнений (70). Но функции $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$ от $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ алгебраически независимы. Значит, в результате исключения может получиться функция, не заключающая аргументов $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$ только тогда, когда после исключения (75) обнаруживается функция, не зависящая от $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$; так как результат не зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_s$, из этого заключаем, что после исключения (75) уравнения (47) с нумерами $s+1, \ldots, s+\sigma$ обращаются сразу в первые σ уравнений (55) и, следовательно, удовлетворяются, если в

(75) все аргументы (9) выражены через a', $a'_{s+\sigma+1}$, ..., a'_n; другими словами, если уравнения (75) заменены уравнениями

$$p_1 = \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_n}. \tag{75$_1$}$$

Из этого ясно, что (74) удовлетворяет первым $s+\sigma$ уравнениям (47). Остается проверить, что (74) действительно полный интеграл, т. е. что из уравнений (75_1) могут быть найдены аргументы (73). Но эти аргументы находятся среди аргументов a, a_{s+1}, ..., a_n, выражения которых через x_1, x_2, ..., x_s и аргументы (50) уже известны.

146. Метода Коркина в случае самой общей системы. Все сказанное в § 144 остается в силе и тогда, когда мы откинем условие, по которому система (47) разрешима относительно m из производных $p_1, p_2, \ldots, p_n$. В этом случае, конечно, не может быть и речи о нахождении полного интеграла Лагранжа системы.

Допустим, что из первых s уравнений системы не могут быть найдены s из производных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и что полный интеграл $M^{(n)}$ системы из s этих уравнений нам известен.

Мы имеем снова $n-s+1$ уравнений

$$\psi_{s+1} = a_{s+1}, \ldots, \psi_n = a_n, \psi_{n+1} = a, \tag{48}$$

к которым мы можем присоединить уравнения

$$\psi_{n+s+1} = b_{s+1}, \ldots, \psi_{2n} = b_n. \tag{49}$$

Решая первые s уравнений (47) совместно с уравнениями (48) и (49), мы можем найти, соответственно сказанному в § 139, аргументы

$$p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots, p_n, x_{s+1}, \ldots, x_n z \tag{76}$$

и s из аргументов

$$p_1, p_2, \ldots, p_s, \quad x_1, \ldots, x_s. \tag{76$_1$}$$

При этом, если окажутся найденными p_1, p_2, ..., p_ν, то также будут найдены $x_{\nu+1}$, $x_{\nu+2}$, ..., x_s; или соответственно сказанному в § 140 аргументы

$$p_s, p_{s+1}, \ldots, p_{n+1}, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n \tag{76$'$}$$

и $s-1$ из аргументов

$$p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}, x_1, \ldots, x_{s-1} \tag{76$''$}$$

с аргументом z; причем если окажутся найденными p_1, p_2, ..., p_ν, то также будут найдены $x_{\nu+1}$, $x_{\nu+2}$, ..., x_{s-1}.

Трактуемые как функции от аргументов x_i, p_i, z аргументы

$$a, a_{s+1}, \ldots, a_n, b_{s+1}, \ldots, b_n \tag{51}$$

попрежнему связаны зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} &[a_h, a_{h_1}] \equiv 0, \ [b_g, b_{g_1}] \equiv 0, \ [a_h, b_g] \equiv 0, \ (h \neq g), \\ &]a, a_h] \equiv 0, \ \ [a_h, b_h] \equiv -\rho, \ [a, b_h] \equiv -\rho\, b_h. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Кроме того скобки

$$[F_h, a_k],\ [F_h, b_l], \qquad (h=1, 2, \ldots, s) \quad (53)$$

обращаются в нуль на основании первых s уравнений (47).

Перебирая содержание § 144, мы видим, что там было доказано: 1) что после исключения известных аргументов (76) и (76_1) из остальных уравнений системы, из этих уравнений исчезают и те аргументы (76_1), которые оставались произвольными, 2) что последние $m-s$ уравнений (47) обращаются в уравнения, связывающие аргументы (51), и находящиеся в инволюции, 3) что замена аргументов (51) их значениями обращает полный интеграл $M^{(n-s)}$:

$$A_{m+1}=c_{m+1}, \ldots, A_n=c_n,\ A_{n+1}=c \qquad (57)$$

системы, полученной из указанных последних $m-s$ уравнений, в полный интеграл системы (47), т. е. что если

$$\Omega_{m+1}=c_{m+1}, \ldots, \Omega_n=c_n,\ \Omega_{n+1}=c \qquad (60)$$

результат такого исключения, справедливы тожества:

$$[\Omega_i, \Omega_j]\equiv 0, \qquad (i, j=m+1, \ldots, n) \quad (61)$$

и скобки

$$[F_h, \Omega] \qquad (h=1, 2, \ldots, m) \quad (62)$$

обращаются в нуль на основании уравнений (47).

В рассматриваемом более общем случае мы также должны установить пункты (1) и (2); по доказанному в концах § 139 и 140 установление пункта (3) достаточно для того, чтобы уравнения (47) и (60) образовывали полный интеграл системы (47).

Но доказательство пунктов (2) и (3) основано исключительно на тожествах (52) и сказанном о скобках (53) и, следовательно, остается в силе. В просмотре нуждается только пункт (1).

Обозначая как в § 144 через Φ функции, получившиеся из последних уравнений после введения в них аргументов (51), отмечаем, что теперь мы имеем

$$F_j=\overline{\Phi}_j(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, p_{\nu+1}, \ldots, p_s, a, a_{s+1}, \ldots, a_n, b_{s+1}, \ldots, b_n)=0 \quad (77)$$

или

$$F_j=\overline{\Phi}_j(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, p_{\nu+1}, \ldots, p_{s-1}, p_n, a, a_{s+1}, \ldots, a_n, b_{s+1}, \ldots, b_n)=0. \quad (77')$$

Ясно, что попрежнему

$$[F_i, F_j]\equiv 0=\overline{[F_i, \Phi_j]}+\sum\overline{\frac{\partial\Phi_j}{\partial a_k}}\,[F_i, a_k]+\sum\overline{\frac{\partial\Phi_j}{\partial b_l}}\,[F_i, b_l],$$

откуда

$$(\overline{[F_i, \Phi_j]})\equiv 0,$$

где скобки попрежнему обозначают результат исключения аргументов, найденных из первых s уравнений (47). Но теперь

$$([\overline{F_i, \Phi_j}]) = \sum_{k=1}^{k=\nu} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\left(\overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}}\right) - \sum_{l=\nu+1}^{l=s} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_l} + p_l \frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\left(\overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_l}}\right) \tag{78}$$

или

$$([\overline{F_i, \Phi_j}]) = \sum_{k=1}^{k=\nu} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right)\left(\overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}}\right) - \sum_{l=\nu+1}^{l=s-1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_l} + p_l \frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\left(\overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_l}}\right) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F_i}{\partial z}\right)\left(\overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_n}}\right). \tag{78'}$$

Определители

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_s)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_s)} \text{ соотв. } \frac{D(F_1, \ldots, F_s)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_{s-1}, z)}$$

попрежнему не равны нулю на основании уравнений системы.

Аргументы $p_{\nu+1}, p_{\nu+2}, \ldots, p_s$, соотв. $p_{\nu+1}, p_{\nu+2}, \ldots, p_{s-1}, p_n$, входящие в коэффициенты уравнений (78) и (78′), принадлежат к числу остающихся произвольными. Отсюда вытекает, что

$$\left(\overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}}\right) \equiv 0, \quad \left(\overline{\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_l}}\right) \equiv 0,$$

где

$$j = s+1, \ldots, m, \; k = 1, 2, \ldots, \nu,$$
$$l = \nu+1, \ldots, s \quad \text{или} \quad l = \nu+1, \ldots, s-1, n$$

и следует равенство нулю соответственных производных от функций Φ_j, что и требовалось установить.

Доказанное расширяет наши возможности при приложении методы Коркина. Найдя полный интеграл некоторых s уравнений (47), предполагая даже, что система (47) удовлетворяет условиям § 144, мы можем составлять полный интеграл системы из преобразованных оставшихся $m-s$ уравнений, снова применяя методу Коркина; при этом мы можем выхватить из этой системы любые σ уравнений, не заботясь о том, подходят ли они под условия § 135 или под условия § 139 или 140.

Ответственный редактор *Е. В. Пулькина.* Технический редактор *В. Д. Финити.*
Сдана в набор 24/X 1933 г. Бум. листов $11^1/_4$. Подписана к печати 27/II 1934 г.
Формат $62\times94^1/_{16}$. ГТТИ № 264. Тип. зн. в 1 бум. л. 104.448.
Ленторлит № 1052. Тираж 5000—авт. л. $29^1/_2$ л. Заказ № 1688.